Efternamn Förnamn Personnummer Program

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

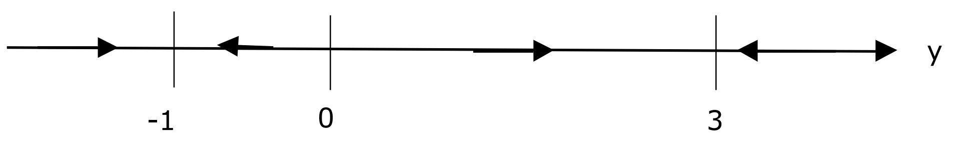
Version A.
KTH Matematik
5B1210-Matematik IV, för Bio2 &K2.
Lappskrivning nr 1, måndagen den 11 september 2006, kl 13.15-14.15.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm de stationära lösningarna till differentialekvationen
   $y \ = y(y+1)(3 \quad y)$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

……………………………………………………………………………………….………

Lösningsförslag:

Vi bestämmer först de kritiska punkterna, konstantlösningarna.
Dessa erhålles då derivatan är lika med noll.
Konstantlösningarna är 0, -1 och 3.
Studera derivatans tecken och rita upp funktionens uppförande i faslinjen.



Derivatan är positiv då x<-1 och då 0<x<3. Funktionen växer.
$y=0$ är en instabil lösning.
$y= \quad 1$ och $y=3$ är en asymptotiskt stabila lösningar.

SVAR:
$y=0$ är en instabil lösning.
$y= \quad 1$ och $y=3$ är en asymptotiskt stabila lösningar.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $(3 \quad x)y \quad y = 1$ som uppfyller villkoret $y(0) = 2$.
Ange vidare lösningens existensintervall.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Den givna differentialekvationen är linjär.
En okulärbesiktning ger vid handen att vänstra ledet redan är en derivata.
Differentialekvationen kan skrivas:

$$\frac{d}{dx}\{(3 \quad x)y\} = 1$$

Integrera med avseende på x.

$$(3 \quad x)y = x + C$$

Bestäm konstanten.

Villkoret $y(0) = 2$ ger $C = 6$.

Lösningen ges av $y = \dfrac{6 + x}{3 \quad x}$

Existensintervallet är antingen x<3 eller x>3.
Eftersom villkoret är givet för x=0 blir det aktuella existensintervallet x<3.

SVAR: Differentialekvationens lösning ges av $y = \dfrac{6 + x}{3 \quad x}$ där $x < 3$.

3. En 500 liters tank innehåller ursprungligen 10 gram salt löst i 200 liter vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.25 gram per liter pumpas in i tanken med en hastighet av 4 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per minut.
När är tanken full ?
Ställ upp en differentialekvation för mängden av salt $Q(t)$.
Bestäm koncentrationen $K(t)$ gram per liter i tanken vid en godtycklig
□□ tidpunkt t .

…………………………………………………………………………………………………….…………

Lösningsförslag

Tanken är full då det har pumpats in 500-200=300 liter lösning.
Detta inträffar efter 300/(4-2)=150 minuter.
Vätskevolymen i tanken vid en godtycklig tidpunkt t ges av $L(t) = 200 + 2t$.
Differentialekvationen för mängden salt $Q(t)$ ges av

$$\frac{dQ}{dt} = 0.25(\text{g/l}) \;\; 4(l/\min) \quad \frac{Q(t)}{L(t)}(\text{g/l}) \;\; 2(\text{l/min}) = 1 \quad \frac{Q(t)}{100+t}.$$

Vi har erhållit en linjär differentialekvation.

Den kan skrivas $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{100+t} = 1$, $(100+t)\frac{dQ}{dt} + Q(t) = 100 + t$, $\frac{d}{dt}\{(100+t)Q(t)\} = 100 + t$.

Integration med avseende på t ger $(100+t)Q(t) = \frac{(100+t)^2}{2} + C$.

Vid tiden $t = 0$ är $Q = 10$ vilket ger att $C = 100 \;\; 10 \quad \frac{100^2}{2} = \;\; 4000$.

Mängden salt vid en godtycklig tidpunkt t ges av $Q(t) = \frac{100+t}{2} \quad \frac{4000}{100+t}$

Koncentrationen $K(t) = \frac{Q(t)}{L(t)} = \frac{1}{4} \quad \frac{2000}{(100+t)^2}$.

Kontroll av rimligheten ger att för stora t-värden blir koncentrationen 1/4 gram per liter.

SVAR: Tanken är tom efter 150 minuter. Koncentrationen $K(t) = \frac{1}{4} \quad \frac{2000}{(100+t)^2}$ gram per liter.