Efternamn Förnamn Personnummer Program

1	2	3	Summa	Betyg

Version A.

KTH Matematik
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Lappskrivning nr 1, måndagen den 11 oktober 2006, kl 08.30-09.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
   $x^2 y \quad 4xy \quad +6y = x^2,\ x > 0$, då en lösning till motsvarande homogena differentialekvation ges av $y = x^2$.

……………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Vi använder metoden "reduktion av ordning".
Detta innebär att vi gör substitutionen $y = x^2 \; z$.
Insättning i differentialekvationen ger:
$x^2(x^2 \; z \; +4x \; z \; +2z) \quad 4x(x^2 \; z \; +2x \; z)+6x^2 \; z = x^2$
Förenkling ger:
$z \; = x^{\; 2}$
Vi har erhållit en differentialekvation där z saknas, till och med z.
Integration ger:
$z = \; x^{\; 1} + A$
$z = \; \ln x + Ax + B$
Detta ger oss den allmänna lösningen
$y = x^2 \; z = x^2(\; \ln x + Ax + B) = Ax^3 + Bx^2 \quad x^2 \ln x$
Här kan den allmänna homogena lösningen identifieras, $y_h = Ax^3 + Bx^2$,
och där finns den givna lösningen $y = x^2$.
Även en partikulärlösning finns identifierbar: $y_p = \; x^2 \ln x$.

<u>SVAR:</u> Den allmänna lösningen $y = Ax^3 + Bx^2 \quad x^2 \ln x$.

2. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Vad händer med en partikel som placeras i punkten (1,2) efter lång tid?

....

Lösningsförslag:

Den allmänna lösningen erhålles genom en linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar. Dessa lösningar bestämmes med hjälp av egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Egenvärdena kan direkt utläsas ur den triangulära matrisen.

Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$.

Motsvarande egenvektorer erhålles ur ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = 2$ ger systemet $\begin{pmatrix} 3-2 & 0 \\ 5 & 2-2 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, en lösning är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$ ger systemet $\begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ 5 & 2-3 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, en lösning är $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösningarna till systemet av differentialekvationer är på formen $e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

Den allmänna lösningen till det givna systemet är $\mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösningen kan även skrivas med hjälp av en fundamentalmatris.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} \\ e^{2t} & 5e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{3t} \\ e^{2t} & 5e^{3t} \end{pmatrix}\mathbf{C}$$

Vi ser att determinanten för matrisen $\begin{pmatrix} 0 & e^{3t} \\ e^{2t} & 5e^{3t} \end{pmatrix}$ är skild ifrån noll.

Detta innebär att vi har en fundamentalmatris.

Eftersom egenvärdena är positiva kommer partikeln att avlägsna sig obegränsat från origo.

<u>SVAR:</u> Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Partikeln avlägsnar sig obegränsat.

3. För ett icke-linjärt system av differentialekvationer $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ bestämmes stationära lösningar.
Karaktären hos dessa lösningar skall undersökas.
Avgör i de fall det är möjligt typ och stabilitet/instabilitet för det icke-linjära systemet då egenvärdena hos det linjariserade systemet är
a) $_{1,2} = \pm 2$ b) $_{1,2} = 2$ c) $_{1,2} = \pm 2i$ d) $_{1,2} = \ 1 \pm 2i$ e) $_{1,2} = \ 3 \pm 2$ f) $_{1,2} = 3 \pm 2$.

Korrekt svar ger + 0.5 poäng per uppgift
Felaktigt svar ger - 0.5 poäng. Ej avgivet svar ger 0 poäng.
Halvpoäng avrundas uppåt.
Totalpoängen på hela uppgiften ligger mellan 0 och 3 poäng.

………………………………………………………………………………

Lösningsförslag

a) $_{1,2} = \pm 2$: Sadelpunkt och därmed instabil.

b) $_{1,2} = 2$: Multipelt egenvärde. Ingen slutsats rörande typ dock angående stabilitet. Positivt egenvärde ger instabilitet.

c) $_{1,2} = \pm 2i$: Imaginära egenvärden. Ingen slutsats.

d) $_{1,2} = \ 1 \pm 2i$: Stabil spiral.

e) $_{1,2} = \ 3 \pm 2$: Stabil nod.

f) $_{1,2} = 3 \pm 2$: Instabil nod.

SVAR: Se ovan.