Efternamn Förnamn Personnummer Program

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

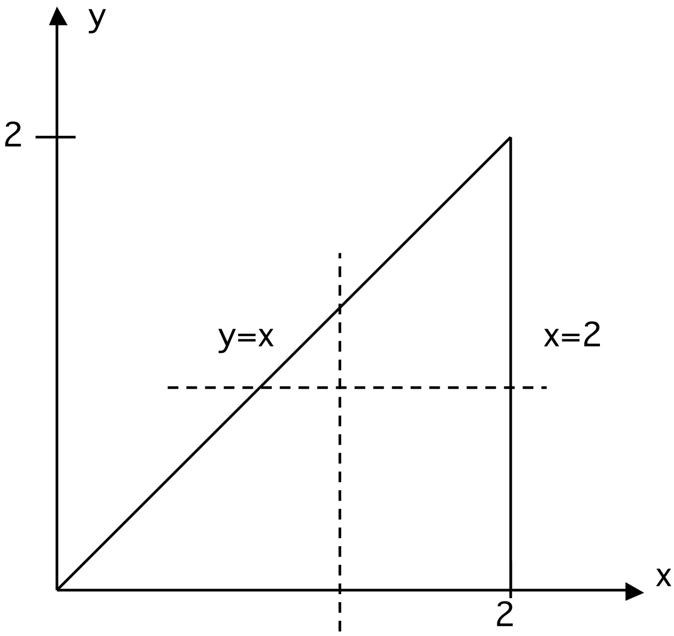
5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Kontrollskrivning nr 3, fredagen den 3 november 2006, kl 09.30-11.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} 2e^{x^2}\,dx\,dy .$$

……………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Integranden är ej elementärt integrerbar med avseende på x.
Däremot går det bra att integrera med avseende på y.
Vi ritar upp området och kastar om integrationsordningen.



$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} 2e^{x^2}\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x} 2e^{x^2}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2} 2xe^{x^2}dx$$

Här kan man göra en substitution: $t = x^2,\ dt = 2xdx$.
Men vi skriver direkt upp resultatet.

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} 2e^{x^2}\,dx\,dy = e^4 - 1$$

SVAR: Dubbelintegralen

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} 2e^{x^2}\,dx\,dy = e^4 - 1 .$$

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (y - x)\,dxdy$$

där D ges av olikheterna $3 \le x + y \le 4$, $1 \le y - x \le 2$.

………………………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:

Vi byter koordinater: $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$.

Området D beskrivs i de nya koordinater: $D_{uv}: \begin{cases} 3 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

Vi behöver Jacobimatrisen: $\begin{cases} u = x + y \\ v = -x + y \end{cases}$ $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Integrationselementet $dxdy = \left| \det\left(\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right) \right| dudv = \dfrac{dudv}{\left| \det\left(\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)}\right) \right|} = \dfrac{dudv}{2}$.

Insättning i dubbelintegralen ger:

$$\iint_D (y - x)\,dxdy = \iint_{D_{uv}} v \frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}(4 - 3)\frac{2^2 - 1^2}{2} = \frac{3}{4}.$$

SVAR: Den sökta dubbelintegralen blir:

$$\iint_D (y - x)\,dxdy = \frac{3}{4}.$$

3. Beräkna volymen av den ändliga kropp som begränsas av:
paraboloiden $z = 12 \quad x^2 \quad y^2$ och konen $z^2 = x^2 + y^2,\ z \quad 0$.

……………………………………………………………………………

Lösningsförslag

Volymen av den ändliga kroppen ges av trippelintegralen $V = \quad_K \, dxdydz$.

Vi bestämmer först ytornas skärningskurva.
Vi får $z^2 + z = 12$, vilken har lösningarna $z = \quad 4$ och $z = 3$.
Skärningskurvan ges av $z = 3,\ x^2 + y^2 = 3^2$.
Vi startar med integration i z-led:

$$V = \quad_{D_{xy}} \quad_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{12 \quad x^2 \quad y^2} dz \quad dxdy = \quad_{D_{xy}} (12 \quad x^2 \quad y^2 \quad \sqrt{x^2 + y^2})dxdy$$

Därefter införes polära koordinater: $\begin{matrix} x = r\cos \\ y = r\sin \end{matrix} \qquad dxdy = rdrd$.

Området D_{xy} beskrivs i polära koordinater: $D_r \quad = \{(r, \quad) : 0 \quad r \quad 3, 0 \qquad 2 \quad \}$.

Insättning i integralen ger $V = \quad_{D_{xy}} \quad_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{12 \quad x^2 \quad y^2} dz \quad dxdy = \quad_{D_r} (12 \quad r^2 \quad r)rdrd$.

Integration med avseende på ger integranden gånger intervallängden.
Vi får efter integrationerna: $V = 2 \quad (6 \ 3^2 \quad \frac{3^4}{4} \quad \frac{3^3}{3}) = \frac{99}{2}$

SVAR: Volymen är $\frac{99}{2}$ volymsenheter.