Efternamn Förnamn Personnummer Program

| 1 | 2 | 3 | Summa | Betyg |

5B1210-Matematik IV, för Bio2 & K2.
Kontrollskrivning nr 4, fredagen den 3 november 2006, kl 09.30-11.30.
BETA, Mathematics Handbook är tillåtet hjälpmedel.

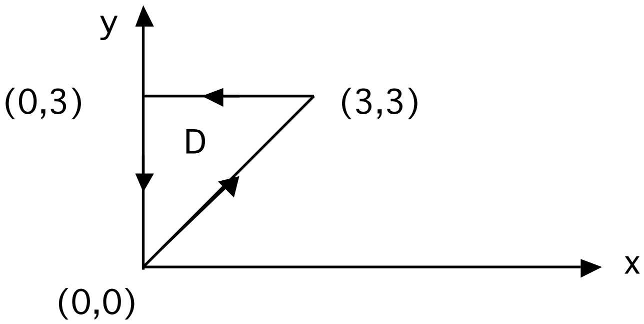
1. Beräkna linjeintegralen

$$(y+e^{x^2})dx+(3x+e^{y^2})dy$$

där är randkurvan till triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (3,3) och (0,3) med orienteringen given av punkternas uppräkning.

……………………………………………………………………………………

Lösningsförslag:
Den givna kurvan är sluten och tagen i positiv riktning.
Vi tillämpar Greens formel.
Det inneslutna området betecknas med D.



$$(y+e^{x^2})dx+(3x+e^{y^2})dy = {}_D \; \frac{}{x}(3x+e^{y^2}) \;\; \frac{}{y}(y+e^{x^2}) \;\; dxdy$$

$$(y+e^{x^2})dx+(3x+e^{y^2})dy = {}_D \; (3 \quad 1)dxdy = 2 \;\; \text{Arean av området } D$$

$$(y+e^{x^2})dx+(3x+e^{y^2})dy = 2 \;\; \frac{3 \;\; 3}{2} = 9$$

SVAR: Linjeintegralen

$$(y+e^{x^2})dx+(3x+e^{y^2})dy = 2 \;\; \frac{3 \;\; 3}{2} = 9$$

2. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (x^2, 5y, z)$ ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

……………………………………………………………………………….………………

Lösningsförslag:

Flödet genom sfären, S, ges av $\underset{S}{\ }\ \mathbf{u}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d$, där $\mathbf{n}$ är en utåtriktade normal.

Vi tillämpar divergenssatsen.

$$\underset{S}{\ }\ \mathbf{u}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d \ = \underset{K}{\ }\ div(x^2, 5y, z)dxdydz = \underset{K}{\ }\ (2x + 5 + 1)dxdydz = \underset{K}{\ }\ (2x + 6)dxdydz.$$

$2x$ är en udda funktion och området är symmetriskt kring origo.
Den delen av integranden ger inget bidrag.
Vi erhåller sex gånger klotets volym.

$$\underset{S}{\ }\ \mathbf{u}\ \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} d \ = 6\ \frac{4\ \ R^3}{3} = 8\ R^3.$$

SVAR: Utflödet genom sfären är $8\ R^3$.

3. Beräkna ytintegralen $\displaystyle \frac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{S}$, där S är ytan

definierad av $S = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2 \quad 1,\ z \quad 0\}$.

… . … … … … …

Lösningsförslag:

Ytan S är den del av halvsfären som ligger innanför cylindern.

Vi behöver en normal till rymdytan.

Rymdytans ekvation: $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \quad 4 = 0$.

En normal till rymdytan ges av

$\mathbf{n} = gradF(x,y,z) = grad(x^2+y^2+z^2 \quad 4) = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$.

Vi normerar: $\hat{\mathbf{n}} = \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \left\{\text{På } S \text{ är } \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\right\} = \dfrac{(x,y,z)}{2}$.

Projicera ytan S på xy-planet.

Vid projektionen på xy-planet ersättes d . Vi har $d \quad = \dfrac{dxdy}{|\cos \quad|}$.

Tredjekomponenten i enhetsnormal är $\cos$.

Vi får $\cos \quad = \dfrac{z}{2} = \left\{\text{På } S \text{ är } z = \sqrt{4 \quad x^2 \quad y^2}\right\} = \dfrac{\sqrt{4 \quad x^2 \quad y^2}}{2}$.

Insättningen i ytintegralen ger $\displaystyle {}_{S}\frac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = {}_{D_{xy}}\frac{dxdy}{\left|\frac{\sqrt{4 \quad x^2 \quad y^2}}{2}\right|\sqrt{4}} = {}_{D_{xy}}\frac{dxdy}{\sqrt{4 \quad x^2 \quad y^2}}$.

Området D_{xy} är enhetscirkelskivan $\{(x,y):\ x^2+y^2 \quad 1\}$.

Vi inför polära koordinater: $\begin{matrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{matrix} \quad dxdy = rdrdt \quad \begin{matrix} r: 0 \quad 1 \\ t: 0 \quad 2 \end{matrix}$.

$$ {}_{S}\frac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = {}_{D_{rt}}\frac{rdrdt}{\sqrt{4 \quad r^2}} = 2 \quad {}_{r=0}^{1}\frac{rdr}{\sqrt{4 \quad r^2}} = 2 \quad \left[\quad \sqrt{4 \quad r^2}\right]_{r=0}^{1} = 2 \ (2 \quad \sqrt{3}) $$

SVAR: Ytintegralen $\displaystyle {}_{S}\frac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2 \ (2 \quad \sqrt{3})$.

<u>Anmärkning.</u>

En annan variant är att använda sfäriskt polära koordinater.

$$ \begin{matrix} x = 2\sin \quad \cos \\ y = 2\sin \quad \sin \\ z = 2\cos \end{matrix} \qquad d \quad = 2^2 \sin \ d \ d \qquad \begin{matrix} :0 \quad \overline{6} \\ :0 \quad 2 \end{matrix} \ . $$

$$ {}_{S}\frac{d}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = {}_{D}\frac{2^2\sin \ d \ d}{2} = 2 \quad 2 \ {}_{=0}^{\overline{6}} \sin \ d \ = 2 \quad 2(\quad \cos\frac{}{6} + 1) = 2 \ (2 \quad \sqrt{3}). $$