Laplacetransformen

7.1. Definition av Laplacetransform.

7.2. Inversa transformen och transformen av derivator.

7.3. Translationsteorem.

7.4. Operationella egenskaper.

7.5. Diracs deltafunktion

7.6. Linjära ekvationssystem.

INTEGRALTRANSFORMER

$$\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt$$

K(s,t) kallas transformens kärna.

$a = 0,\ b = \infty,\ K(s,t) = e^{-st}$ ger Laplacetransformen.

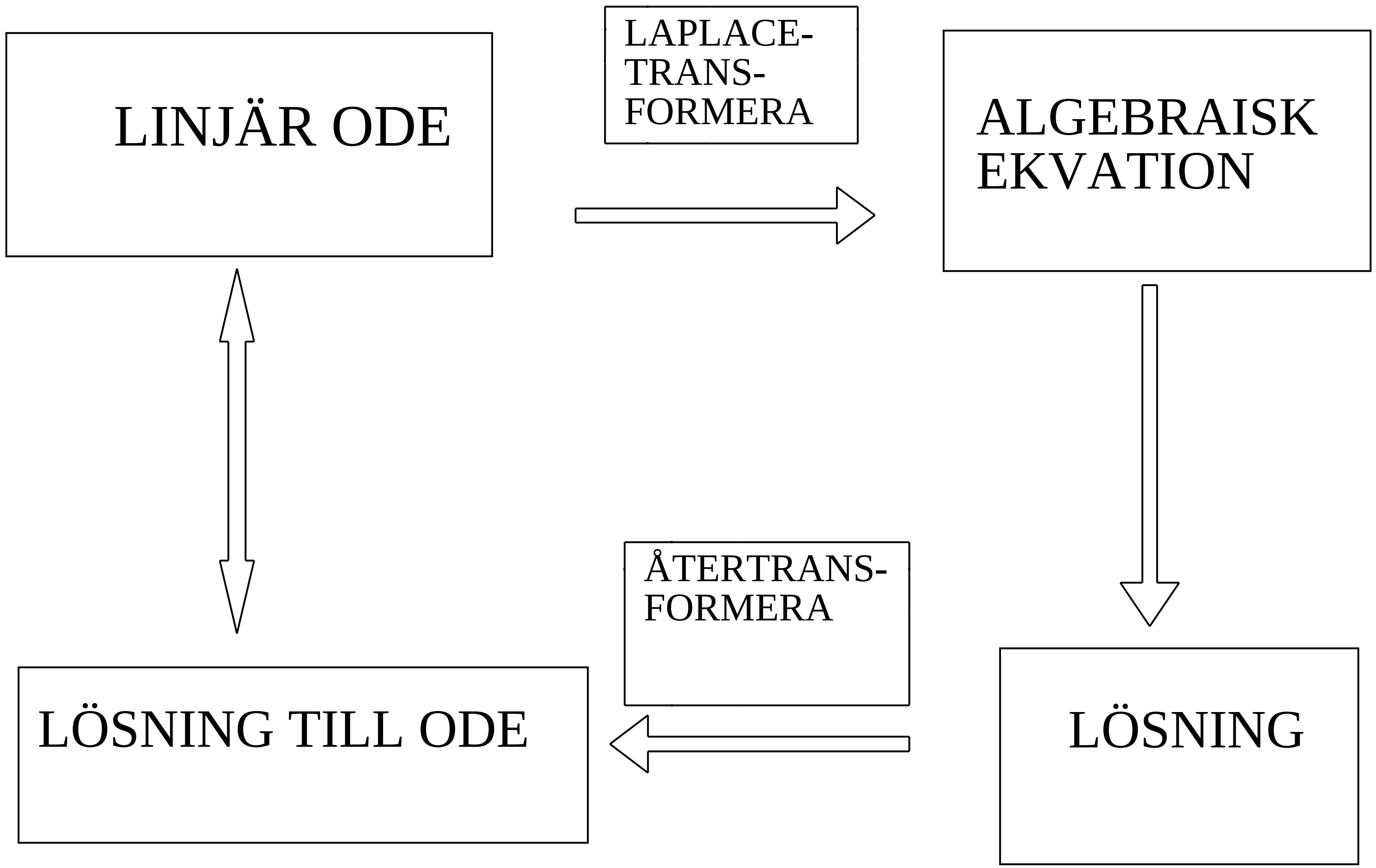
$a = -\infty,\ b = \infty,\ K(s,t) = e^{-ist}$ ger Fouriertransformen.

LAPLACETRANSFORM

HEAVISIDES ENHETSSTEGFUNKTION

DIRACS DELTAFUNKTION

FALTNING


LINJÄR ODE
LAPLACE-
TRANS-
FORMERA
ALGEBRAISK
EKVATION
LÖSNING
ÅTERTRANS-
FORMERA
LÖSNING TILL ODE

Laplacetransformationen av f : $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

Då integralen konvergerar.

En funktion är av exponentiell ordningen c om det finns en konstant c, M > 0, och T > 0 så att $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})| \leq \boldsymbol{M}e^{\boldsymbol{ct}}$ för alla t > T.

Om f(t) är styckvis kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$

och av exponentiell ordning c för t $> T$,

då existerar L{ f(t) } för s > c.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\boxed{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \quad \text{existerar.}}$$

$$\boxed{\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_T^\infty \left|e^{-st} f(t)\right| dt \le M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct}\,dt =}$$

$$\boxed{= M \left[\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)}\right]_T^\infty = M\,\frac{e^{-(s-c)T}}{(s-c)}}$$

Om $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ är kontinuerliga på intervallet $[\,0\,,\,\infty\,)$ och av exponentiell ordning och om $f^{(n)}(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[\,0\,,\,\infty\,)$, då gäller

$$L\{\,f^{(n)}(t)\,\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

där $F(s) = L\{f(t)\}$.

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt =$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= -f(0) + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

$$\boxed{L\{f''(t)\} = sL\{f'(t)\} - f'(0)}$$

$$\boxed{= s(sL\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) =}$$

$$\boxed{= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

Om f(t) är styckvis kontinuerlig på $[\,0\,,\,\infty\,)$

och av exponentiell ordning för $t > T$,

då är $\lim\limits_{s \to \infty} L\{f(t)\} = 0.$

$$\begin{cases} |f(t)| \le M_1 = M_1 e^{0t}\ ,\ 0 \le t \le T \\ |f(t)| \le M_2 e^{\gamma t}\ ,\ t > T \end{cases}$$

$$M = \max\{M_1,\ M_2\},\ c = \max\{0,\ \gamma\}$$

$$\left|L\{f(t)\}\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}\left|f(t)\right| dt \le$$

$$\le M\int_0^\infty e^{-st} e^{ct}\,dt = M\left[\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)}\right]_0^\infty = \frac{M}{(s-c)}\ ,\ \ s > c$$

$$\left|L\{f(t)\}\right| \to 0\ ,\ \ s \to \infty \qquad L\{f(t)\} \to 0\ ,\ \ s \to \infty$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och a är ett godtyckligt reellt tal , då är $L\{\ e^{at} f(t)\} = F(s-a)$.

$$L\{\ e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\,dt =$$

$$= \{s_1 = s - a\} = \int_0^{\infty} e^{-s_1 t} f(t)\,dt = F(s_1) = F(s-a)$$

Funktionen $U(t-a)$ definieras av

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad 0 \le t < a \\ 1 & \text{då} \quad t \ge a \end{cases}$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och $a > 0$,

då är $L\{\, f(t-a)U(t-a)\,\} = e^{-as}F(s)$.

$$L\{\, f(t-a)U(t-a) \,\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)U(t-a)\,dt =$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt = \left\{ \begin{matrix} v = t-a \\ dv = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(a+v)} f(v)\,dv = e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-as}F(s).$$

Om $F(s) = L\{f(t)\}$ och n = 1, 2, 3 , ... ,

då gäller $L\{\, t^n f(t)\,\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)dt =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st} tf(t)dt = -L\{tf(t)\}$$

$$\boxed{L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)}$$

$$\boxed{L\{t^2 f(t)\} = -\frac{d}{ds}\{L\{tf(t)\}\} =}$$

$$\boxed{= -\frac{d}{ds}\{-\frac{d}{ds}F(s)\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)}$$

Transform av Diracs deltafunktion

För $t_0 > 0$ $\qquad L\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$

$$f_a(t) = \frac{1}{2a}\{U(t-(t_0-a)) - U(t-(t_0+a))\}$$

$$L\{f_a(t)\} = \frac{1}{2a}[L\{U(t-(t_0-a))\} - L\{U(t-(t_0+a))\}] =$$

$$= \frac{1}{2a}[\frac{1}{s}e^{-(t_0-a)s} - \frac{1}{s}e^{-(t_0+a)s}] = \frac{e^{-t_0 s}}{2as}(e^{as} - e^{-as})$$

$$\boxed{\lim_{a\to 0} L\{f_a(t)\} = \lim_{a\to 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as}(e^{as} - e^{-as}) =}$$

$$\boxed{= \lim_{a\to 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as}(1 + as - (1 - as) + O(a^2)) =}$$

$$\boxed{= \lim_{a\to 0} \frac{e^{-t_0 s}}{2as}(2as + O(a^2)) =}$$

$$\boxed{= \lim_{a\to 0} e^{-t_0 s}(1 + O(a)) = e^{-t_0 s}}$$

Om $f(t)$ är styckvis kontinuerlig på $[\,0, \infty\,)$,

av exponentiell ordning och periodisk med peroden T,

då $L\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \displaystyle\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt.$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \left\{ \begin{aligned} u &= t - T \\ du &= dt \end{aligned} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-s(u+T)} f(u+T)\,du = \\ & = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u)\,du = e^{-sT} L\{f(t)\} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt + e^{-sT} L\{f(t)\}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$$

Låt funktionerna f och g vara styckvis kontinuerliga på intervallet $[\,0\,,\,\infty\,)$,
då ges faltningen , $f \quad g$, av f och g av integralen

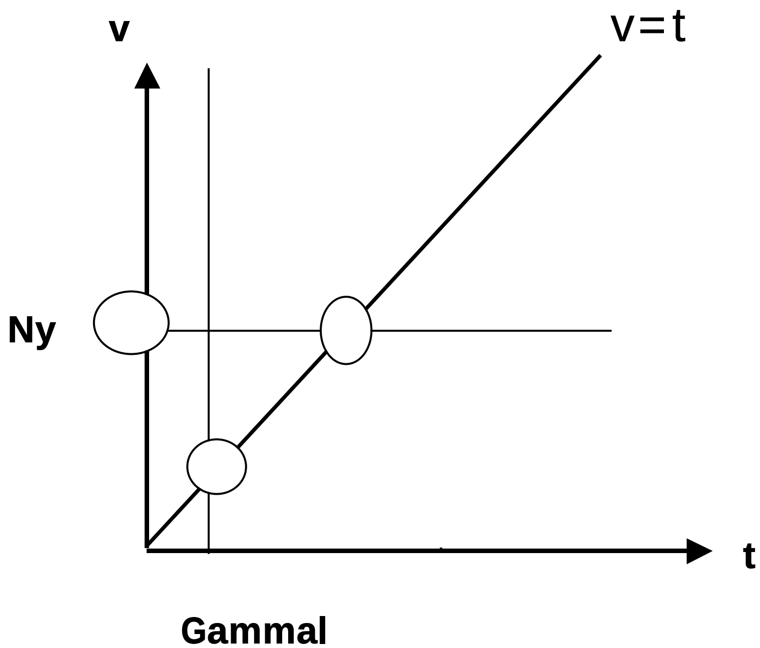
$$f \quad g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau .$$

Om $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ och $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ är styckvis kontinuerliga på $[\,0\,,\,\infty\,)$
och av exponentiell ordning ,
då $\boldsymbol{L}\{\boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{g}\} = \boldsymbol{L}\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\}\boldsymbol{L}\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})\} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt} \qquad \boxed{G(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(u)du}$$

$$\boxed{F(s)G(s) = \{\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\}\{\int_0^\infty e^{-su} g(u)du\} =}$$

$$\boxed{= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su} g(u)e^{-st} f(t)dtdu = \int_0^\infty f(t)\{\int_0^\infty g(u)e^{-s(t+u)}du\}dt =}$$



$$\boxed{\{v = t + u,\ \ dv = du\}}$$

$$\boxed{\{v : t -> \infty,\ \ t : 0 -> \infty\}}$$

$$\boxed{\{t : 0 -> v,\ \ v : 0 -> \infty\}}$$

$$= \int_0^\infty f(t)\{\int_t^\infty g(v-t)e^{-sv}dv\}dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-sv}\{\int_0^v f(t)g(v-t)dt\}dv =$$

$$= \int_0^\infty e^{-sv} f*g(v)dv = L\{f*g\}$$