Omformning av högre ordningens ODE.

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

Karakteristisk ekvation:

$$\boxed{r^2 + 1 = 0}$$

$$\boxed{r = \pm i}$$

$$\boxed{y = A\cos x + B\sin x}$$

Sätt $\boxed{x = y'}$

$$\begin{cases} x' = y'' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\boxed{\lambda = i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}} \qquad \boxed{\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda = -i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}} \qquad \boxed{\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}}$$

System av linjära första ordningens ODE.

8.1. Inledande teori.

8.2. Homogena linjära system med konstanta koefficienter.

8.3. Variation av parametrar.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \ , \ \ t_0 \qquad I$$

Låt elementen i matriserna $\mathbf{A}(t)$ och $\mathbf{F}(t)$

vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall I.

Då har begynnelsevärdesproblemet entydig lösning på I.

$$\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}} \quad [H]$$

$$\boxed{\mathbf{X}_1 \text{ och } \mathbf{X}_2 \text{ är lösningar till [H].}}$$

Påstående:

$$\boxed{\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 \text{ är lösning till [H].}}$$

V.L. i [H]: $\boxed{\mathbf{X}' = c_1 \mathbf{X}_1' + c_2 \mathbf{X}_2'}$

H.L. i [H]: $\boxed{\mathbf{AX} = c_1 \mathbf{AX}_1 + c_2 \mathbf{AX}_2}$

Vi har: $\boxed{\mathbf{X}_1' = \mathbf{AX}_1}$ $\boxed{\mathbf{X}_2' = \mathbf{AX}_2}$

Detta ger att: V.L. i [H] =H.L. i [H]

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$$

$$W(\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

$$W(\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2) \neq 0$$

Linjärt oberoende.

$$\text{Fundamentallösningar}: \ \mathbf{X}_1, \ \mathbf{X}_2 .$$

$$\text{Allmän lösning}: \ \mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 .$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{C}$$

Φ kallas fundamentalmatris.

Exempel

$$\frac{dy}{dt} = ay, \quad y' = ay, \quad y = Ce^{at}$$

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \qquad \begin{cases} x = C_1 e^{at} \\ y = C_2 e^{bt} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & b - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda)$$

$$\lambda = a$$

$$\begin{pmatrix} a-a & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = b$$

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = e^{bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{bt} \end{pmatrix}$$

HOMOGENA LINJÄRA SYSTEM
MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{K} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} e^{\lambda t} = A\mathbf{K} e^{\lambda t}$$

$$(A - \boldsymbol{\lambda} I)K = 0$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden

Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplexa egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\boxed{\mathbf{X} = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t}}$$

Upprepade reella egenvärden

Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\boxed{\mathbf{X} = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t}}$$

Exempel

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$(D+1)^2 y = 0$$

$$e^t (D+1)^2 y = 0, \quad D^2\{e^t y\} = 0$$

$$e^t y = At + B, \quad y = e^{-t}(At + B)$$

Multipelt egenvärde med en egenvektor.

λ_1 egenvärde med multiplicitet 2.

Ena lösningen $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$.

Ansätt : Andra lösningen $\mathbf{X}_2 = (t\ \mathbf{L} + \mathbf{P})e^{\lambda_1 t}$

$$\{t\mathbf{L}+\mathbf{P}\}e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\lambda}_1+\mathbf{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{AL}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{AP}e^{\lambda_1 t}$$

$$\mathbf{L}=(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I})\mathbf{L}t+(\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I})\mathbf{P}$$

$$t:\quad (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}_1 I)\mathbf{L}=\mathbf{0}$$

$$t^0:\quad (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}_1 I)\mathbf{P}=\mathbf{L}$$

$$\boxed{(\mathbf{A}-\lambda_1 I)(\mathbf{A}-\lambda_1 I)\mathbf{P}=0\ ,\ (\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}_1 I)^2\mathbf{P}=\mathbf{0}}$$

Multipelt egenvärde med en egenvektor.

λ_1 egenvärde med multiplicitet 3.

Ena lösningen $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$.

Andra lösningen $\mathbf{X}_2 = (t\ \mathbf{L} + \mathbf{P})e^{\lambda_1 t}$

Tredje lösningen $\mathbf{X}_3 = (t^2\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)e^{\lambda_1 t}$

$$((t^2\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\lambda_1 + 2t\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)e^{\lambda_1 t} =$$

$$= e^{\lambda_1 t}(\mathbf{A}(t^2\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3))$$

$$t^2: \ \mathbf{v}_1\lambda_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \quad (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

$$t: \ \mathbf{v}_2\lambda_1 + 2\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{v}_2, \ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$$

$$t^0: \ \mathbf{v}_3\lambda_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}\mathbf{v}_3, \ (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1&=\mathbf{0}\\(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^2\mathbf{v}_2&=\mathbf{0}\\(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^3\mathbf{v}_3&=\mathbf{0}\end{aligned}}$$

$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ $\mathbf{A}$ reella element.

$\mathbf{X}$ är komplex lösning.

$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ reella.

$\mathbf{X}' = \mathbf{X}_1' + i\mathbf{X}_2'$ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + i\mathbf{A}\mathbf{X}_2$

$$\mathrm{Re}: \quad \mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1$$

$$\mathrm{Im}: \quad \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2$$

Komplexa egenvärden $\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad ,\alpha \quad R, \;\; \beta \quad R.$

Komplexa egenvektorer $\mathbf{K} = \mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2$

$$Z = \mathbf{X_1} + i\mathbf{X}_2$$

$$Z = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t} = (\mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2)e^{(\alpha + i\beta)t}$$

$$Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1} + i\mathbf{K}_2)(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$\mathbf{X_1} = \operatorname{Re} Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1}\cos\beta t - \mathbf{K}_2\sin\beta t)$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im} Z = e^{\alpha t}(\mathbf{K_1}\sin\beta t + \mathbf{K}_2\cos\beta t)$$

Variation av parametrar

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C}$$

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$$

$$\Phi'(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{A}\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}(t)$$

$$(\Phi'(t) - \mathbf{A}\Phi(t))\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t)$$

$$\Phi(t)\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t) \ , \ \mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{X}_{\boldsymbol{p}} = \Phi(\boldsymbol{t})\int \Phi^{-1}(\boldsymbol{t})\mathbf{F}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

$$\boldsymbol{X} = \Phi(\boldsymbol{t})\mathbf{C} + \Phi(\boldsymbol{t})\int \Phi^{-1}(\boldsymbol{t})\mathbf{F}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$