Introduktion till differentialekvationer.

1.1. Definitioner och terminologi.

1.2. Begynnelsevärdesproblem.

1.3. Matematiska modeller.

Typ

Ordning

Linjär eller icke-linjär

Lösning

Begynnelsevärdesproblem, BVP

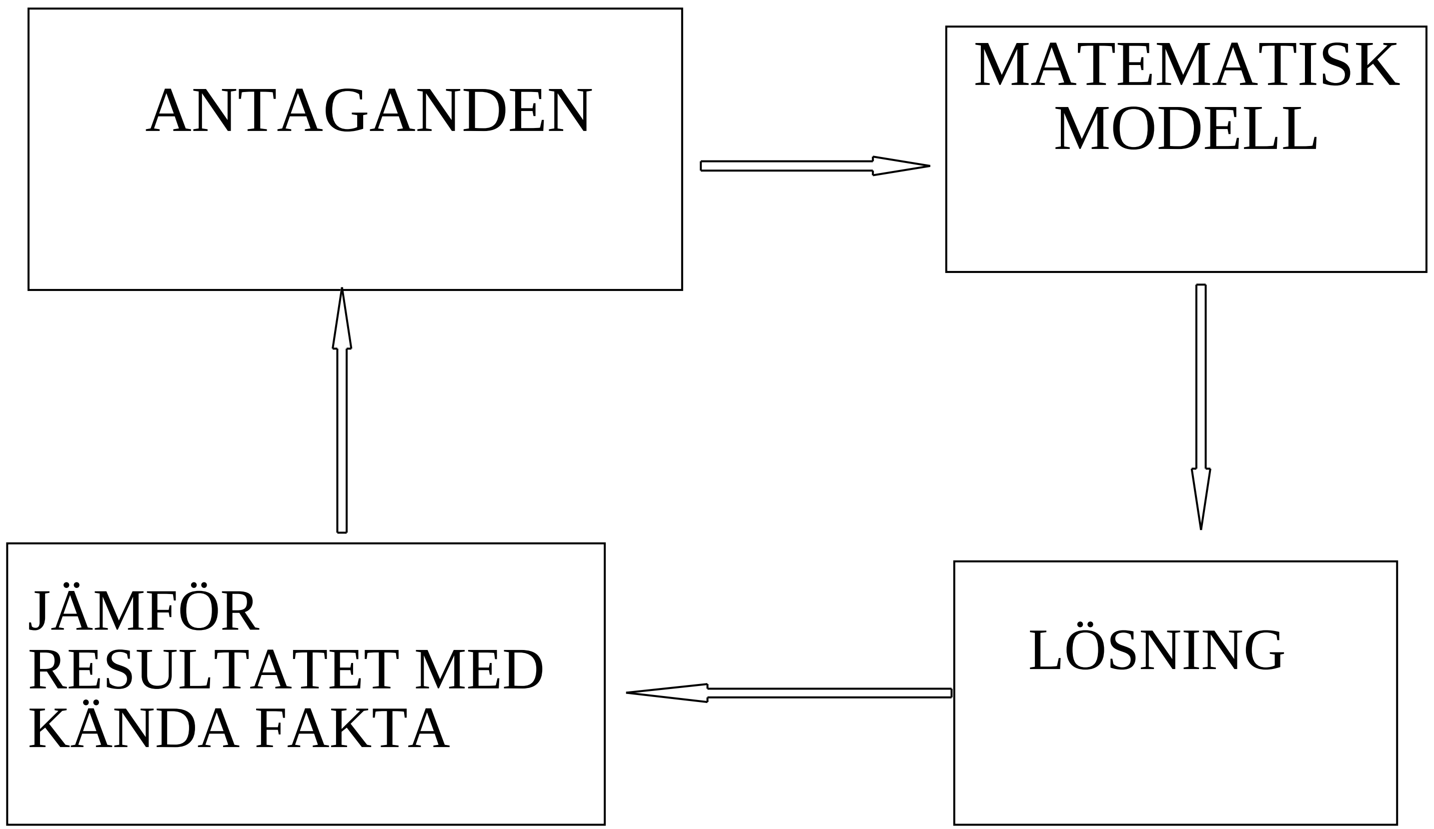
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$$

$$\boxed{y(x_0) = y_0}$$

Teorem 1.1. Existens av unik lösning.

Låt R vara ett rektangulärt område i xy - planet definierat av $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ som innehåller punkten$(x_0\ ,y_0)$ i sitt inre.

Om $f(x,y)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga på R, då existerar ett intervall I_0: $x_0 - h < x < x_0 + h$ innehållet i $a \leq x \leq b$ och en entydig funktion $y(x)$, definierad på I_0, som är en lösning till begynnelsevärdesproblemet $\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$.


ANTAGANDEN
MATEMATISK MODELL
LÖSNING
JÄMFÖR RESULTATET MED KÄNDA FAKTA

Första ordningens differentialekvation

2.1. Kvalitativ analys.

2.2. Separabla differentialkevationer.

2.3. Linjära differentialekvationer.

2.5. Substitutioner.

LINJEELEMENT

ISOKLINER

RIKTNINGSFÄLT

AUTONOM $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(y)}$

KRITISK PUNKT

JÄMVIKTSPUNKT

STATIONÄR PUNKT

FASPORTRÄTT

FASLINJE

ATTRAKTOR

REPELLATOR

Första ordningens ODE $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$

SEPARABLA $\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$

LINJÄRA $\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$

SEPARABLA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$$

I. $$\boxed{h(y) = 0 : y = \text{konstant}}$$

II. $$\boxed{h(y) \neq 0 : \ \frac{1}{h(y)} \ \frac{dy}{dx} = g(x)}$$

Integrera map x.

Linjär av första ordningen.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)} \qquad [\ 1\ ]$$

Lös först den homogena differentialekvationen.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx + P(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int P(x)dx = \ln|C_1|$$

$$y = \pm C_1 e^{-\int P(x)dx} = C_2 e^{-\int P(x)dx}$$

Variation av parametrar.

Ansätt $y = u(x)y_1(x)$, där $y_1(x) = e^{-\int P(x)\,dx}$.

Insättning i [1] ger: $\dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} y_1 + u\dfrac{dy_1}{dx} + Puy_1 = f$.

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} y_1 = f, \quad \frac{du}{dx} = \frac{f}{y_1}, \quad u = \int \frac{f}{y_1}\,dx + C_3$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int f(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C_3\right\}$$

Allmänna lösningen

$$\boxed{y = C_3 e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int f(x) e^{\int P(x)dx} dx.}$$

$$\boxed{\text{Allmänna lösningen kan skrivas:} \quad y = y_h + y_p.}$$

$$\boxed{y_p = e^{-\int P(x)dx} \int f(x) e^{\int P(x)dx} dx.}$$

LINJÄRA

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Multiplicera med

$$e^{\int P(x)dx}$$

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)\,dx}P(x)y=e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)\,dx}y\right)=e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

Integrera map x.

SUBSTITUTIONER

HOMOGENA

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Sätt $z = \dfrac{y}{x}$. $y = xz$, $y' = xz' + z$.

$xz' + z = f(z)$,

$xz' = f(z) - z$ vilken är separabel.

BERNOULLSKA

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^{\alpha}$$

$$\alpha \neq 0,\ \ \alpha \quad R$$

$$\alpha \neq 1,\ \ \alpha \quad R$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

Sätt $z = y^{1-\alpha},\ \ z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = f(x)$, vilken är linjär.

Modeller med första ordningens ODE.

3.1. Linjära.

3.2. Icke-linjära.

3.3. System av linjära och icke-linjära.

Linjära

Tillväxt och sönderfall:

Newtons avkylningslag

Blandningar

Seriekretsar

Icke-linjära

Befolkningsmodeller

Kemisk reaktion av andra ordningen

System av linjära och icke-linjära

Blandningar

Radioaktiv sönderfallsserie

Rovdjurs- och bytesdjurmodell