Partiella differentialekvationer och randvärdesproblem.

12.1. Separabla PDE

12.2. Klassiska ekvationer och randvärdesproblem.

12.3. Värmeledningsekvationen.

12.4. Vågekvationen.

12.5. Laplace ekvation.

Variabelseparation.

$$u'_x = u + u'_y$$

Ansats: $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$$

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\boxed{\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{konstant} = \lambda}$$

$$\boxed{\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1)y} \end{cases}}$$

$$\boxed{u_\lambda(x,y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x+(\lambda-1)y} = c_\lambda e^{\lambda x+(\lambda-1)y}}$$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_\lambda c_\lambda e^{\lambda x+(\lambda-1)y}}$$

$$\boxed{\text{Villkor: } u(x,0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}.}$$

$$\boxed{u(x,0) = 5e^{-3x} - 4e^{x} = \sum_\lambda c_\lambda e^{\lambda x}}$$

Identifiering ger :

$$\begin{cases} \lambda = -3, \; c_{-3} = 5 \\ \lambda = 1, \; c_1 = -4 \\ \text{Övriga } c_\lambda = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,y) = 5e^{-3x-4y} - 4e^{x}}$$

Partiella differentialekvationer, PDE.

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\quad , \quad k>0.$$ Värmeledningsekvationen .

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad .$$ Vågekvationen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\quad .$$ Laplace ekvation .

Variabelseparation.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ .\ \text{Vågekvationen.}$$

$$\text{Ansats: } u(x,t) = X(x)T(t).$$

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \text{konstant} = \lambda$$

Ett system av okopplade ODE erhålles.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

Linjära med konstanta koefficienter.

Tre olika fall : $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

$$\boxed{\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \quad R.}$$

$$\boxed{X''(x) - \mu^2 X(x) = 0}$$

$\boxed{\text{Lösningarna ges av } X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}.}$

$\boxed{\text{Motsvarande för "T-ekvationen" ger}: \mathrm{T}(\mathrm{t}) = \mathrm{C}_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}.}$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\boxed{X''(x) = 0}$$

$$\boxed{X(x) = A_2 x + B_2}$$

$$\boxed{T(t) = C_2 t + D_2}$$

$$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \quad R.$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$T(t) = C_3 \cos a\mu t + D_3 \sin a\mu t$$

12.4.1.

Vi söker den lösning som uppfyller de givna randvillkoren.

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Därefter anpassar vi lösningen till begynnelsevillkoren.

$$u(x,0) = \frac{1}{4}x(L-x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas

$0 = u(0,t) = X(0)T(t)$

$0 = u(L,t) = X(L)T(t)$

Dessa samband skall gälla för alla t.

Detta innebär att : $0 = X(0), 0 = X(L)$.

Vi studerar de tre olika fallen.

$$\lambda > 0,\ \lambda = \mu^2,\ \mu \quad R.$$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$.

$$0 = \mathrm{X}(0) = \mathrm{A}_1 + B_1$$

$$0 = X(L) = \mathrm{A}_1 e^{\mu L} + B_1 e^{-\mu L}$$

$$B_1 = -A_1$$

$$\mathrm{A}_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0$$

Endast den triviala lösningen $A_1 = B_1 = 0$.

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\boxed{X(x) = A_2 x + B_2}$$

$$\boxed{T(t) = C_2 t + D_2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 = X(0) = B_2 \\ 0 = X(L) = A_2 L + B_2 \end{array}}$$

$\boxed{\text{Endast den triviala lösningen } A_2 = B_2 = 0.}$

$$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \ \mu \quad R.$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$0 = X(0) = A_3$$

$$0 = X(L) = A_3 \cos \mu L + B_3 \sin \mu L$$

$$B_3 \sin \mu L = 0$$

$B_3 = 0$ ger endast den triviala lösningen.

Däremot ger $\sin \mu L = 0$ följande: $\mu L = n\pi,\ \ n \quad Z.$

$$X(x) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Motsvarande för "T - lösningen":

$$T(t) = C_3 \cos a \frac{n\pi}{L} t + D_3 \sin a \frac{n\pi}{L} t.$$

En lösning som satisfierar differentialekvationen och de givna randvillkoren är :

$$\mathrm{u}_{\mathrm{n}}(x,t) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x \ \{ \ C_3 \cos a \frac{n\pi}{L} t + D_3 \sin a \frac{n\pi}{L} t \ \}$$

Varje linjärkombination av lösningar är en lösning.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\ a_n \cos a\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin a\frac{n\pi}{L}t\ \}\ \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna a_n och b_n.

Begynnelsevillkoren ger oss dessa.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}\{\ -a_n \sin a\frac{n\pi}{L}t + b_n \cos a\frac{n\pi}{L}t\ \}\ \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\boxed{u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{4}x(L-x)} \qquad (\#)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}b_n \sin\frac{n\pi}{L}x = 0} \qquad (\#\#)$$

Multiplicera (#) med $\sin\dfrac{m\pi x}{L}$

och integrera från 0 till L.

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L} x\,dx = \int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\frac{1}{4}x(L-x)\,dx$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\frac{(n-m)\pi x}{L}-\cos\frac{(n+m)\pi x}{L}\right\}dx$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = [n\neq m] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{L} - \frac{L}{(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]_0^L = 0$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = [n = m] =$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{1 - \cos\frac{2m\pi x}{L}\right\}dx = \frac{L}{2}$$

$$a_n \frac{L}{2} = \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\frac{1}{4}x(L-x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{4}x(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x \;\; dx =$$

$$= \frac{2}{L}\left\{ \left[\frac{x(L-x)}{4} \;\; \frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \int_0^L \frac{L-2x}{4} \;\; \frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x \;\; dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{L}\left\{0 + \frac{L}{n\pi}\left\{ \left[\frac{L-2x}{4} \;\; \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L - \int_0^L \frac{-2}{4} \;\; \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x \;\; dx \right\}\right\} =$$

$$= \frac{2}{L}\left\{0 + \frac{L}{n\pi}\left\{ \left[\frac{-2}{4} \; \frac{L}{n\pi}\,\frac{L}{n\pi} \cos\frac{n\pi}{L}\,x \right]_0^L \right\}\right\} = \frac{L^2}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad n = 2m \\ \dfrac{2L^2}{(2m+1)^3\pi^3} & , \quad n = 2m+1 \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos a\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin a\frac{n\pi}{L}t \right\} \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2L^2}{(2m+1)^3\pi^3} \cos a\frac{(2m+1)\pi}{L}t \right\} \sin\frac{(2m+1)\pi}{L}x$$

Ortogonala funktioner och Fourierserier.

11.1. Ortogonala funktioner.

11.2. Fourierserier.

11.3. Fouriercosinus- och sinusserier.

Inreprodukt

$$(f_1 , f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Några trigonometriska formler

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

Ortogonalrelationer

$$\int_{-p}^{p} 1 \ \cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 \ , \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} 1 \ \sin\frac{m\pi x}{p}\,dx = 0 \ , \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi x}{p}\, dx = 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\frac{m\pi x}{p} \cos\frac{n\pi x}{p}\, dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \\ p \ , & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi x}{p}\, dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \\ p \ , & m = n \end{cases}$$

Funktionsföljden

$$\left\{ 1,\ \cos\frac{\pi x}{p},\ \cos\frac{2\pi x}{p},\ \ldots\cos\frac{m\pi x}{p}\ldots,\ \sin\frac{\pi x}{p},\ \sin\frac{2\pi x}{p},\ \ldots\sin\frac{n\pi x}{p}\ldots \right\}$$

är ortogonal på intervallet $[-p,p]$ med den inre produkten

$$(f_1, f_2) = \int_{-p}^{p} f_1(x) f_2(x)\,dx$$

Trigonometrisk serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Fourierserien till en funktion f definierad på intervallet $(-p,p)$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \int_{-p}^{p} \{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) \}dx}$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{m\pi x}{p}\,dx = \int_{-p}^{p} \{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) \}\sin\frac{m\pi x}{p}\,dx}$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx = \int_{-p}^{p} \{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p})\} \cos\frac{m\pi x}{p}\,dx}$$

Konvergensvillkor

Låt f och f' vara styckvis kontinuerliga på intervallet $(-p,p)$.

Då konvergerar f:s Fourierserie mot $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Fourierserier för udda och jämna funktioner.

Jämn funktion : $f(-x) = f(x), \quad x \quad I.$

Udda funktion : $f(-x) = -f(x), \quad x \quad I.$

Fourierserien för en jämn funktion på intervallet $(-p, p)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\,dx$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet $(-p, p)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx$$