Plana autonoma system och stabilitet.

10.1. Autonoma system.

Kritiska punkter. Periodiska lösningar.

10.2. Stabilitet hos linjära system.

10.3. Linjarisering och lokal stabilitet.

AUTONOMT SYSTEM

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2) \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\mathbf{X}' = g(\mathbf{X})$$

PLANT AUTONOMT SYSTEM

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y)\end{aligned}}$$

VEKTORFÄLT

$$\boxed{\mathbf{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))}$$

LÖSNINGSTYPER

STATIONÄR PUNKT

BÅGE

PERIODISK LÖSNING

Stabilitetsundersökning av lineära system $\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}}$

Egenvärden till matrisen.

Reella **Komplexa**

Enkla

Multipla

Stationära punkter: $\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{X}}$

$$\boxed{\det \mathbf{A} \neq 0}$$

(0,0) är enda stationära punkten

$$\lambda \text{ reella och enkla}(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 & \text{Instabil nod} \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 & \text{Sadelpunkt, instabil} \\ \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 & \text{Stabil nod} \end{cases}$$

$$\lambda \text{ reella och multipla}(\lambda_1, \lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 > 0 & \text{Instabil degenererad nod} \\ \lambda_1 = \lambda_2 < 0 & \text{Stabil degenererad nod} \end{cases}$$

$$\lambda \text{ komplexa } (\lambda = \alpha \pm i\beta)$$

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \text{Instabil spiral} \\ \alpha = 0 & \text{Centrum, stabil} \\ \alpha < 0 & \text{Stabil spiral} \end{cases}$$

Stabilitetskriterium för linjära system

$$\boxed{\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}\ ,\ \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{X}_{\mathbf{0}} \neq \mathbf{0}\ ,\ \det(\mathbf{A}) \neq 0}$$

1 $$\boxed{\lim_{t\to\infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}\lambda < 0}$$

2 $$\boxed{\mathbf{X}(t) \text{ är periodisk} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}\lambda = 0}$$

3 I övriga fall finns det minst ett $\mathbf{X}_0$

för vilket $\mathbf{X}(t)$ blir obegränsat då t växer.

Stabilitetsundersökning av autonom diff.ekv.

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

Stationär lösning

$$\boxed{\dot{x} = 0 = f(x)} \quad \boxed{x = x_o}$$

Taylorutveckla

kring den kritiska punkten

$$\boxed{\dot{x} = f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + R_2}$$

$$\boxed{\dot{x} = (x - x_0) f'(x_0) + R_2}$$

Linjariserad diff.ekv.

$$\dot{x} = (x - x_o) f'(x_o)$$

$$\frac{\dot{x}}{x - x_o} = f'(x_o)$$

$$\ln|x - x_0| = \ln|C_1| + t f'(x_0)$$

$$\boxed{x - x_0 = \pm C_1 e^{tf'(x_0)} = Ce^{tf'(x_0)}}$$

$$\boxed{x = x_0 + Ce^{tf'(x_0)}}$$

$$\boxed{\begin{cases} f'(x_0) > 0 & \text{Instabil} \\ f'(x_0) < 0 & \text{Asymptotiskt stabil} \end{cases}}$$

Exempel

$$\boxed{\dot{x} = (x-1)(x-2)}$$

$$\boxed{\dot{x} = x^2 - 3x + 2 = f(x)}$$

$$\boxed{f'(x) = 2x - 3}$$

Kritiska punkter

$$\dot{x} = 0 = (x-1)(x-2)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$f'(1) = 2\ \ 1 - 3 = -1 < 0$$

Asyptotiskt stabil

$$f'(2) = 2\ \ 2 - 3 = 1 > 0$$

Instabil

Stabilitetsundersökning av icke-lineära system

$$\boxed{\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X})}$$

Stationär lösning:

$$\boxed{\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{X})}$$

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\mathrm{o}}}$$

Taylorutveckla

kring den kritiska punkten

$$\boxed{\dot{X} = f(X) = f(X_0) + f'(X_0)(X - X_0) + R_2}$$

Linjariserat system

$$\boxed{\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}'(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}$$

Sätt: $\boxed{\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{X}}}$

$$\boxed{\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y}}$$

Studera det linjariserade systemet och jämför med det icke-linjära.

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}_1$ är en kritisk punkt till $\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X})$

$P(x,y) \quad C^1$ och $Q(x,y) \quad C^1$ i en omgivning av $\mathbf{X}_1$.

Låt λ_i vara egenvärde till $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{X}_1)$.

Om $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ så är $\mathbf{X}_1$ en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

Om ett egenvärde är positivt så är $\mathbf{X}_1$ en instabil kritisk punkt.

Lineariserade - Icke lineära.

$$\text{Samma geometriska beteende}:\begin{cases}\text{Stabil nod}\\ \text{Stabil spiralpunkt}\\ \text{Instabil nod}\\ \text{Instabil spiralpunkt}\\ \text{Sadelpunkt}\end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 > 0}$$

$$\boxed{\begin{cases} \text{Instabil spiralpunkt ?} \\ \text{Instabil nod ?} \\ \text{Degenererad instabil nod ?} \end{cases}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 < 0}$$

$$\boxed{\begin{cases} \text{Stabil spiralpunkt ?} \\ \text{Stabil nod ?} \\ \text{Degenererad stabil nod ?} \end{cases}}$$

$$\lambda = \pm i\beta$$

$$\begin{cases} \text{Stabil spiralpunkt ?} \\ \text{Instabil spiralpunkt ?} \\ \text{Center ?} \end{cases}$$

$$\text{Fas - plan - metoden: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$