Kontrollskrivning 1. 5B1212 CL HT03. (Fredag 31/10.)

Version A: Lös intitialvärdesproblemet $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+4y=7 \\ y(1)=2 \end{cases}$. Svar: $\underline{y=\frac{1}{4}\left(7+x^{-4}\right)}$.

Version B: Lös intitialvärdesproblemet $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+6y=5 \\ y(1)=1 \end{cases}$. Svar: $\underline{y=\frac{1}{6}\left(5+x^{-6}\right)}$

Lösningsförslag (A-version).

Differentialekvationen är linjär. Vi skriver först ekvationen på normalform:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x}y=\frac{7}{x} \qquad (1)$$

Vi identifierar koefficienten $P(x)=4/x$ framför y-termen, och beräknar den integrerande faktorn

$$m(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{4\int\frac{1}{x}dx}=e^{4\ln|x|}=e^{\ln|x|^4}=|x|^4=x^4,$$

och multiplicerar sedan bägge led i (1) med $m(x)=x^4$

$$x^4\frac{dy}{dx}+4x^3y=7x^3.$$

Som sig bör kan vi då skriva vänster led som derivatan av produkten my

$$\frac{d}{dx}\left(x^4y\right)=7x^3.$$

Integration av bägge led ger

$$x^4y=7\int x^3dx \quad\Leftrightarrow\quad y=x^{-4}\left(7\frac{x^4}{4}+C\right) \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{7}{4}+Cx^{-4}.$$

Initialvillkoret $y(1)=2$ ger slutligen att

$$2=\frac{7}{4}+C \quad\Leftrightarrow\quad C=\frac{1}{4}.$$

Alternativ lösning

Ekvationen är också separabel, vi kan skriva den som

$$\frac{dy}{dx}=\frac{7-4y}{x}.$$

Vi ser att $y(x)\equiv 7/4$ är en konstantlösning. Om $y\neq 7/4$ kan vi separera variablerna och integrera

$$\int\frac{dy}{7-4y}=\int\frac{dx}{x} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{4}\ln|7-4y|=\ln|x|+C_0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln|7-4y|=-4\ln|x|+C_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln|7-4y|=\ln|x|^{-4}+C_1 \Leftrightarrow\quad 7-4y=C_2x^{-4} \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{7}{4}+Cx^{-4}$$