5B1212
CL HT03

Kontrollskrivning 2. Måndag 10/11.

A- och B-version

Uppgift: Bestäm samtliga lösningar $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x$$

Tips: Partikulärlösning bestäms med fördel med "variation av parametrar" eller "reduktion av ordning", men andra kända metoder kan också användas.

Svar: $y(x) = (c_1 + c_2 x + x^4/12)e^x$

Lösningsförslag: Vi löser först den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$. Eftersom den har konstanta koefficienter löser vi den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 2r + 1 = 0$, som har en dubbelrot $r = 1$. Det följer att den allmänna homogena lösningen ges av
$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ där $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = xe^x$.
För att bestämma en partikulär lösning använder vi s.k. "variation av parametrar": Vi söker en partikulärlösning på formen $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$. Enligt i kursen härledd formel fås $u_1(x)$ och $u_2(x)$, om vi tillfälligt betecknar högerledet i diff.ekvationen f, från

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-fy_2}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{fy_1}{W(y_1, y_2)}$$

där $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^x(e^x + xe^x) - e^x xe^x = e^{2x}$. Följaktligen är

$$u_1' = \frac{-x^2 e^x xe^x}{e^{2x}} = -x^3 \text{ och } u_2' = \frac{x^2 e^x e^x}{e^{2x}} = x^2.$$

Efter integration får vi att

$$u_1 = \int -x^3\, dx = -\frac{x^4}{4} \text{ och } u_2 = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Genom att sätta in dessa i vår ansats för y_p får vi

$$y_p = -\frac{x^4}{4}e^x + \frac{x^3}{3}xe^x = \frac{x^4}{12}e^x$$

Således ges den allmänna lösningen av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x + x^4/12)e^x$$