Kontrollskrivning 3. Fredag 14/11. Svar och Lösningsförlsag.

Uppgift: Bestäm samtliga lösningar till följande system av differentialekvationer

A-version: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ **B-version:** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

Svar (A-version) : $\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{7t} + 2c_2e^{-t} \\ y(t) = c_1e^{7t} - 3c_2e^{-t} \end{cases}$ **Svar (B-version) :** $\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{4t} + c_2e^{t} \\ y(t) = c_1e^{4t} - c_2e^{t} \end{cases}$

Lösningsförslag (A-version):
Vi bestämmer rötterna till den karaktäristika ekvationen (= egenvärdena till systemmatrisen).

$$0 = \begin{vmatrix} 5-r & 4 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r - 7 \quad \Leftrightarrow \quad r = 3 \pm \sqrt{3^2 + 7} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 7, r_2 = -1 \ .$$

Vi bestämmer sedan tillhörande egenvektorer. Till $r_1 = 7$ hör en egenvektor $\overline{K}_1$ som uppfyller $\begin{pmatrix} 5-7 & 4 \\ 3 & 1-7 \end{pmatrix}\overline{K}_1 = \overline{0}$, dvs vi söker icke-triviala lösningar till det homogena ekvationssytem som representeras av matrisen $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ som efter Gausselemination är radekvivalent med matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi väljer $\overline{K_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och får en lösning $X_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$.

Till $r_2 = -1$ hör en egenvektor $\overline{K}_2$ som uppfyller

$\begin{pmatrix} 5-(-1) & 4 \\ 3 & 1-(-1) \end{pmatrix}\overline{K}_2 = \overline{0}$. Matrisen i vänsterledet, $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ är efter Gausselemination är radekvivalent med matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi väljer $\overline{K_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och får en lösning

$X_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Allmän lösning fås genom att bilda godtyckliga linjärkombinationer av de de två linjärt oberoende lösningarna X_1 och X_2

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$$