

Kontrollskrivning 4. Svar och lösningsförslag.

A-version:

Uppgift: Bestäm den lösning $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ till det linjära systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ som uppfyller initialvillkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gör också en enkel skiss av lösningskurvan.

Svar: $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t - 3 \sin 3t \\ 2 \cos 3t \end{pmatrix}$. Kurvan är en ellips kring origo, som bl.a. passerar (1,2).

B-version:

Uppgift: Bestäm den lösning $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ till det linjära systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ som uppfyller initialvillkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gör också en enkel skiss av lösningskurvan.

Svar: $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos 4t + \sin 4t \\ 2 \cos 4t \end{pmatrix}$. Kurvan är en ellips kring origo, som bl.a. passerar (-2,0).

Lösningsförslag (A-version): Den karakteristiska ekvationen $\begin{vmatrix} 1-l & -5 \\ 2 & -1-l \end{vmatrix} = 0$ har rötter

$l = \pm 3i$. Egenvektor $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ hörande till $l = 3i$ fås som icke-trivial-lösning till

ekvationssystemet med matris $\begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix}$. Vi adderar $(-1+3i)/2$ gånger rad 2 till

rad 1 och får den ekvivalenta matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix}$ och finner $\mathbf{K}$ som t.ex. $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Enligt teorin fås då allmän lösning som

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1(\operatorname{Re}(\mathbf{K}) \cos 3t - \operatorname{Im}(\mathbf{K}) \sin 3t) + c_2(\operatorname{Im}(\mathbf{K}) \cos 3t + \operatorname{Re}(\mathbf{K}) \sin 3t) = \\ &= c_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 3t \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 3t \right) \end{aligned}$$

Vid $t = 0$ försvinner sinus-termerna, och vi ser att initialvillkoret är uppfyllt med $c_1 = 1$ och $c_2 = 0$. För att skissa kurvan räcker att konstatera att lösningen är periodisk, dvs. att kurvan är sluten, och att vi kan beräkna några punkter genom att sätta in några t -värden.

