Kontrollskrivning 5. 5B1212 HT03 CL2. 28/11. Svar och lösningsförslag.

Uppgift: Bestäm och klassificera (med avseende på typ och stabilitet) samtliga kritiska punkter (stationära lösningar) till systemet

A-version: $\begin{cases} x'(t) = 2x - y \\ y'(t) = x^2 + y \end{cases}$ Svar: $(0,0)$ instabil nod. $(-2,-4)$ sadelpunkt (instabil)

B-version: $\begin{cases} x'(t) = 2x - y^2 \\ y'(t) = x + y \end{cases}$ Svar: $(0,0)$ instabil nod. $(2,-2)$ sadelpunkt (instabil)

Lösningsförslag (version B):

Kritiska punkter ges av $\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. Den andra ekvationen ger att $x = -y$. Insatt i första ekvationen ger detta att $-2y - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(y+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0, y_2 = -2$.
Andra ekvationen ger motsvarande x-värden och vi finner två kritiska punkter $(0,0)$ och $(2,-2)$.
För att undersöka stabiliteten och punkternas karaktär beräknar vi vektorfältets Jacobimatris

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(2x - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(2x - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + y) & \frac{\partial}{\partial y}(x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(0,0)$ finner vi att

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En triangulär matris har diagonalelementen som egenvärden, dvs. vi har två positiva egenvärden, alltså är den kritiska punkten $(0,0)$ en instabil nod.
Alternativt kan vi beräkna spåret $t = 2 + 1 = 3$ och determinanten $\Delta = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2$ och konstatera att $t^2 - 4\Delta = 9 - 8 > 0$ och att $t > 0$, vilket ger att $(0,0)$ är en instabil nod.

I punkten $(2,-2)$ finner vi att

$$J(2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena beräknas ur $\begin{vmatrix} 2 - l & 4 \\ 1 & 1 - l \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l^2 - 3l - 2 = 0$ till $l = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.
Alltså har vi ett positivt och ett negativt egenvärde, vilket medför att den kritiska punkten är en sadelpunkt. En sådan är alltid instabil.

Alternativt beräknar vi spåret $t = 2 + 1 = 3$ och determinanten $\Delta = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = -2$.
Eftersom $\Delta < 0$ är det frågan om en sadelpunkt (som alltid är instabila).