5B1212 CL2 HT03. Kontrollskrivning 7. Torsdag 11/12.
Svar och lösningsförslag

<u>Uppgift A-version:</u> Bestäm en funktion $u(x,t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t, & 0 < x < 4,\ t > 0; \quad (1) \\ u(0,t) = 0 & t > 0; \quad (2) \\ u(4,t) = 0 & t > 0; \quad (3) \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < 4. \quad (4) \end{cases}$$

där $g(x)$ är någon given funktion med kontinuerlig derivata på intervallet på $[0,4]$.

Ledning:

- Vid separation av variablerna räcker det att beakta fallet

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -l^2 < 0 \quad (5)$$

- Du kan hänvisa till ekvationerna på detta blad, du behöver ej skriva av dem. Du kan också utgå ifrån att separation av variablerna leder fram till ekvation (5).

<u>Svar A-version:</u> $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\frac{p^2}{16}t} \sin\frac{np}{4}x$ där $b_n = \frac{1}{2}\int_0^4 g(x)\sin\frac{np}{4}x\,dx$.

<u>Uppgift B-version:</u> Bestäm en funktion $u(x,t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} u''_{xx} = u'_t, & 0 < x < 2,\ t > 0; \quad (1) \\ u(0,t) = 0 & t > 0; \quad (2) \\ u(4,t) = 0 & t > 0; \quad (3) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 2. \quad (4) \end{cases}$$

där $f(x)$ är någon given funktion med kontinuerlig derivata på intervallet på $[0,2]$.

Ledning:

- Vid separation av variablerna räcker det att beakta fallet

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -l^2 < 0 \quad (5)$$

- Du kan hänvisa till ekvationerna på detta blad, du behöver ej skriva av dem. Du kan också utgå ifrån att separation av variablerna leder fram till ekvation (5).

Korrigering i efterhand: Ekvation (3) skall vara $u(2,t) = 0, \quad t > 0$.

<u>Svar B-version:</u> $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\frac{p^2}{4}t} \sin\frac{np}{2}x$ där $b_n = \int_0^2 g(x)\sin\frac{np}{2}x\,dx$.

Lösningsförslag A-version: Vi söker först lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Ekvationen (1) övergår då i (5). Likaledes transformeras (2) och (3) till $\begin{cases} X(0) = 0 & (6) \\ X(4) = 0 & (7) \end{cases}$.

(5) $\Rightarrow \quad X'' + l^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos lx + B\sin lx$.

(6) $\Rightarrow \quad A = 0$ och eftersom vi söker icke-triviala lösningar gör det att (7) $\Rightarrow \sin 4l = 0$.

Detta ger att vi endast har lösningar för $l = l_n = n\frac{p}{4},\ n = 1,2,\ldots$ och dessa blir

$X_n(x) = B_n \sin l_n x$.

För T ger (5) med $l = l_n$ att $T' + l_n^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = T_n(t) = C_n e^{-l_n^2 t}$.

Var och en av funktionerna $u_n = X_n T_n,\ n = 1,2,\ldots$ uppfyller nu ekvation (1), (2) och (3). Eftersom dessa ekvationer är homogena utgör även superpositioneringar av dessa lösningar.

Bilda $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\frac{p^2}{16}t} \sin\frac{np}{4}x$.

(4) $\Rightarrow \quad g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{np}{4}x \quad \forall \quad 0 < x < 4$

vilket uppfylls om vi väljer

$$b_n = \{\text{Fourier - sinus koefficienter till } g \text{ på } (0,4)\} = \frac{2}{4}\int_0^4 g(x)\sin\frac{np}{4}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 g(x)\sin\frac{np}{4}x\,dx$$