5B1212
CL HT03

Miniprojket 1: Två populationsmodeller

Instruktioner: Följande uppgifter skall lösas individuellt. Under arbetets gång får du förstås gärna diskutera med dina kamrater och söka hjälp i litteraturen, men alla källor skall redovisas ordentligt, såväl litteratur och web-sidor som personlig kommunikation. Att kopiera litteratur eller en kamrats arbete är naturligtvis inte tillåtet.
Vid bedömningen kommer stor vikt fästas vid att presentationen är klar och tydlig. Lösningarna skall vara utförligt och tydligt genomförda samt väl läsbara för en person med förkunskaper som motsvarar dina egna. Kommentera, beskriv och tolka vad du gör.
Använd gärna matematisk programvara eller räknare där du finner det lämpligt, men du skall då alltid redovisa vilka hjälpmedel du har använt, och kommentera eventuella felkällor som detta kan ge upphov till. På kurshemsidan finns en del Maple-tips.
Uppgifterna skall lämnas in senast 19/11. Maximalt ger detta projekt 2 poäng till den avslutande tentans A-del och 2 poäng att räknas för betyg 4 eller 5 på tentans B-del; mer om examinationsbestämmelserna finns på kurshemsidan.

Rickermodellen – en populationsmodell i diskret tid.

W.E. Ricker introducerade 1954 en modell för att beskriva vissa fiskpopulationers utveckling. Denna populationsmodell har sedan kommit att användas även i andra sammanhang. I den s.k. Ricker-modellen antas storleken $x_n \geq 0$ av den *n*:te generationen ges av

$$\begin{cases} x_{n+1} = l\, x_n \exp(-b\, x_n), \quad n = 1,2,\dots, \\ x_0 = a. \end{cases}$$

$x_0 = a \geq 0$ är den initiala populationsstorleken, och l och b är två stycken positiva parametrar som används för att anpassa modellen till givna data. Observera att $x_k \geq 0 \Rightarrow x_{k+1} \geq 0$, så om vi använder iterationsformeln ovan kommer $x_n \geq 0$ för alla $n \geq 0$.

Uppgifter på Rickermodellen

1. *Dina personliga parametrar: Modellens egenskaper beror på valet av* l *och* b. *Just du skall i denna uppgift studera modellen för parametervärden som ges av dina födelsedata; du skall sätta parametrarna till* $l = F + 1.5$ *och* $b = CD/100$, *där C, D, och F är 3:e, 4:e respektive 6:e siffran i ditt personnummer abCDeF. Den som t.ex. har födelsedata 560828 väljer alltså* $l = 8 + 1.5 = 9.5$ *och* $b = 08/100 = 0.08$.

   Bestäm samtliga fixpunkter till modellen för dessa parametervärden och avgör deras stabilitet. Illustrera med grafisk analys kring fixpunkterna. Tolka dina resultat i termer av detta är en populationsmodell. (1p till tentans A-del)

2. Sätt $b = 1$, och analysera sedan hur modellens egenskaper beror på l när $0 < l < 10$. Ge relevanta tolkningar i termer av populationens utveckling.

(1p till tentans B-del)

En modell i kontinuerlig tid.

Din gode vän populationsbiologen söker upp dig en dag och ber dig om din hjälp. Han har i en artikel stött på följande populationsmodell i kontinuerlig tid. Antal djur i populationen efter t år ges av $P = P(t)$, som antas uppfylla initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = -kP(T-P)\left(\dfrac{K-P}{K-T}\right), \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

$k > 0$ och $0 < T < K$ är konstanter som beror på populationens art och deras miljö.

Din vän vill nu ha hjälp med att besvara följande frågor:

3. Vad kan man säga om $\lim_{t\to\infty} P(t)$? Hur beror denna långtidsutveckling av P_0? Ge en rimlig populationsdynamisk tolkning av konstanterna K och T.

(1p till tentans A-del)

4. För en viss djurart i en viss miljö har man efter observationer skattat konstanterna till $k = 10^{-7}$, $T = 5 \cdot 10^5$ och $K = 10^6$. Man skattar också att populationen år 2003 består av 600 000 individer. Gör en prognos av hur populationen utvecklar sig de kommande 30 åren. Analysera också hur prognosen påverkas av eventuella mätfel i observationer och skattningar.

(1p till tentans B-del)