Matematik KTH
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
HT03

Miniprojekt 2

Pendelns ekvation

1. Bakgrund

Vi har tidigare i kursen studerat linjära ekvationer som beskriver enkla svängningsrörelser. För en svängande pendel är dessa linjära ekvationer en approximation giltig vid små svängningsamplituder. I detta miniprojekt skall ni studera den icke-linjära ekvationen för en svängande pendel, med och utan hänsyn tagen till friktion med det omgivande mediet.

Läs i kapitel 5.3 (sid. 249 i 5:e upplagan) och i kapitel 10.4 (sid. 471 i 5:e upplagan samt övning 16 sid. 479) för en bakgrund. Beteckningarna nedan följer dem i Zill-Cullen.

2. Uppgifter

1. Se till att du förstår och kan redogöra för härledningen av pendelns ekvation

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta - \beta\frac{d\theta}{dt}, \qquad \beta \geq 0$$

där $-\beta\dfrac{d\theta}{dt}$ är en friktionsterm; $\beta = 0$ svarar mot det idealiserade fallet utan friktion, positiva värden på β svarar mot friktion av olika storlek.

2. Skriv om denna ekvation som ett autonomt system av första ordningens differentialekvationer i de beroende variablerna *x* och *y*. Förklara varför det är fysikaliskt relevant att kalla *xy*-planet för pendelns *fasrum* (*tillståndsrum*). [1]

3. Bestäm systemets kritiska punkter, och bestäm också de kritiska punkternas karaktär och stabilitet samt hur dessa egenskaper beror på β. Vilka slutsatser kan vi dra om det icke-linjära systemets kritiska punkter? Illustrera med skisser!

4. För fallet $\beta = 0$, studera det fasporträtt som finns på sidan 471, figur 10.29.
a) Hur mycket av informationen i figur 10.29 får vi från analysen i uppgift 3?
b) Kan vi från fysikaliska överväganden motivera ytterligare delar av figur 10.29?
c) Beskriv de olika typer av kurvor du ser, och förklara vilka typer av pendelrörelser dessa svarar emot. Observera speciellt den typ av kurvor som asymptotiskt förbinder t.ex. $(-\pi, 0)$ och $(\pi, 0)$.

Komplettera nu denna teoretiska analys med en datorstöd numerisk/grafisk analys. Du kan med fördel använda de Maple-kommandon som finns beskrivna i *Maple och ordinära differentialekvationer* …, avsnitt 3, på kurshemsidan.

För att få en bra plot (inom rimlig tid) är det viktigt att välja lagom långa intervall för *t*-variabeln och ”bra” värden `stepsize`. Pröva er fram; ett *t*-intervall `t=0..10` och `stepsize=0.1`

---

[1] Extrafråga: Kan du motivera att fasrummet i själva verket kan ses som en rät cirkulär cylinder snarare än ett plan? Systemet av differentialekvationer bestämmer då ett vektorfält på cylindern, och vi vill hitta lösningskurvor på cylindern snarare än i planet

fungerade bra för mig i många fall. I vissa fall kan det vara fördelaktigt att sträcka ut tidsintervallet något på negativa sidan, t.ex. `t=-1..10.`
Försäkra er om att ni följer banorna under tillräckligt lång tid för att kunna förutse deras fortsatta utseende.
Som initialvillkor är det naturligt att bl.a. använda punkter i närheten av stationära lösningar. Om linjäriseringen kring de kritiska punkterna har reella egenvektorer ger dessa en indikation om intressanta störningsriktningar

5. Rita (med datorhjälp) fasporträtt för de olika fall du fann i uppgift 3. Se till att varje fasporträtt innehåller såväl vektorfältet som ett representativt urval av banor. Observera att du även skall göra detta i fallet $b=0$, även om en sådan figur redan finns i boken.

6. Sammanfatta och beskriv dina resultat.

7. Besök sidan http://www.aw-bc.com/ide/index.html och klicka dig fram via `Chaos and bifurcations -> Chacos in Forced nonlinear oscillators -> Forced damped pendulum tool.` Här kan du se vad som kan hända om vi dessutom lägger till en drivande periodisk kraft (systemet är då inte längre autonomt, och kan inte analyseras med de tekniker vi har lärt oss.) [2]

[2] Hur kan man visualisera ett icke-autonomt vektorfält? Varför bryter de tekniker vi har lärt oss samman om ekvationerna inte är autonoma?