Matematik KTH
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
HT03

Miniprojekt 2

En bytes- rovdjursmodell

1. BAKGRUND

I detta miniprojekt skall ni studera en modell som beskriver hur populationsstorlekarna hos ett bytesdjur och rovdjur samverkar och påverkar varandra.

Vi låter $x = x(t)$ beteckna antalet rovdjur och $y = y(t)$ antalet bytesdjur vid tid *t*, där antalet djur räknas i lämplig skala så att variablerna *x* och *y* är av storleksordning $\sim 10^0 - 10^1$. De bägge arterna antas leva i en miljö utan konkurrens eller kontakt med andra djurarter. Rovdjuret lever endast av bytesdjuret i modellen, och bytesdjuret lever av en begränsad resurs i miljön.

Vi antar följande samband

(P)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cxy + \dfrac{r}{K} y(K - y) \end{cases},$$

där $a, b, c, r, K > 0$ är konstanter. Modellen är en modifierad form av den klassiska Lotka-Volterra-modellen (se Zill-Cullen avsnitt 10.4), som var ett av de första försöken att beskriva populationsdynamik för interagerande populationer med differentialekvationer.

Vi är endast intresserade av de lösningskurvor som ligger i första kvadranten $x \geq 0, y \geq 0$. (Varför då?)

2. UPPGIFTER

1. Förklara och tolka biologiskt de olika termerna i ekvationerna (P), och ge en biologisk tolkning av konstanterna *a, b, c, r* och *K.* Som ett led i detta,
(a) formulera och lös den ekvation som resulterar om rovdjursstammen har utrotats ($x(t) \equiv 0$);
(b) formulera och lös den ekvation som resulterar om bytesdjursstammen har utrotats ($y(t) \equiv 0$).

Fortsättningsvis skall vi studera denna modell för $a = b = 1/4$ och $c = 1$, och undersöka hur modellens egenskaper beror på *r* och *K*.

2. Visa att om $0 < K \leq 1$ så har systemet två kritiska punkter i första kvadranten $x \geq 0, y \geq 0$. Bestäm karaktär och stabilitet hos dessa kritiska punkter under antagandet att $0 < K \leq 1$. Illustrera med en enkel skiss och ge en biologisk tolkning.

3. Visa att för $K > 1$ har systemet tre kritiska punkter i första kvadranten. Bestäm stabilitet och karaktär för dessa; skilj på fallen $r < K(K - 1)$, gränsfallet $r = K(K - 1)$ och $r > K(K - 1)$. Illustrera med en enkel skiss och ge en biologisk tolkning.

Komplettera nu denna teoretiska analys med en datorstöd numerisk/grafisk analys. Du kan med fördel använda de Maple-kommandon som finns beskrivna i *Maple och ordinära differentialekvationer …*, avsnitt 3, på kurshemsidan.

För att få en bra plot (inom rimlig tid) är det viktigt att välja lagom långa intervall för *t*-variabeln och "bra" värden `stepsize`. Pröva er fram; ett *t*-intervall `t=0..50` och `stepsize=0.1` fungerade bra för mig i många fall. I vissa fall kan det vara fördelaktigt att sträcka ut tidsintervallet något på negativa sidan, t.ex. `t=-1..10.`
Försäkra er om att ni följer banorna under tillräckligt lång tid för att kunna förutse deras fortsatta utseende.
Som initialvillkor är det naturligt att bl.a. använda punkter i närheten av stationära lösningar. Om linjäriseringen kring de kritiska punkterna har reella egenvektorer ger dessa en indikation om intressanta störningsriktningar.
.
4. Rita (med datorhjälp) fasporträtt för de olika fall du fann i uppgift 2 och 3. Se till att varje fasporträtt innehåller såväl vektorfältet som ett representativt urval av banor.
Beakta t.ex. fallen (i) $0 < K = 1/2 < 1$, (ii) $K = 2 > 1, r = 1 < K(K-1)$ och (iii) $K = 2 > 1, r = 3 > K(K-1)$.

5. Sammanfatta, beskriv och tolka dina resultat.

6. Besök sidan http://www.aw-bc.com/ide/index.html och klicka dig fram via `Systems of differential equations -> Predator-Prey population models.`
Här kan du studera dels riktiga data över har- och lodjurs-populationernas utveckling i Hudson Bay i Kanada under en längre tidsperiod (`Hudson Bay data tool`), och också experimentera med Lotka-Volterras ursprungliga modell (`Lotka-Volterra tool`). Hur skiljer sig Lotka-Volterras ursprungliga modell från den ni har studerat ovan i form och dynamik? (På sidan finns också möjlighet att studera en Lotka-Volterra ekvation modifierad med termer som beskriver exploatering i form av jakt på djurpopulationerna. (`Lotka-Volterra with harvest tool)`).