

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 17/12 2003 08.00-13.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 4 B-uppgifter om 4 poäng vardera.

För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från kontrollskrivningar och miniprojekt under kursens gång, samt minst 4 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.

För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från miniprojekt under kursens gång

Inga hjälpmedel tillåtna.

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet
$$\begin{cases} y' + y \sin t = \sin t \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$
2. Bestäm samtliga lösningar till $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}.$
3. Bestäm den lösning till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ som uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$
4. Skriv differentialekvationen $x'' + x' + x^2 = 1$ som ett första ordningens system, och bestäm sedan stationära lösningar och deras stabilitet.
5. Bestäm Fourierserien till $f(x) = x - 1$ på intervallet $(-p/2, p/2).$
6. Betrakta ekvationen $cu_{xx} = u_t$ där $c > 0$ är en konstant. Bestäm alla lösningar som är av formen $u(x, t) = X(x)T(t)$ och där $X(x)$ är en linjärkombination av (reella) trigonometriska funktioner.

B-uppgifter

7. En populationsmodell i diskret tid. Populationens storlek år n betecknas (i lämplig skala) x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, och antas vara bestämd av initialpopulationen x_0 genom

$$x_{n+1} = k \frac{x_n}{1 + x_n^2} \text{ där } k \text{ är en positiv konstant. Variabeln } x_n \text{ är alltid icke-negativ.}$$

- a) Visa att modellen har en fixpunkt för $0 < k \leq 1$ och två fixpunkter för $k > 1$. (1p)
b) Bestäm fixpunktens/fixpunkternas stabilitet då $0 < k < 1$ och då $k > 1$. (1p)
c) Hur ser modellens populationsutveckling ut i fallet $k = 1$, och hur beror den på storleken x_0 av initialpopulationen? (2p)

8. a) Bestäm samtliga lösningar $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{X}$. (2p)

- b) Bevisa att om $\mathbf{X}_1(t)$ och $\mathbf{X}_2(t)$ är två lösningar till ett linjärt system

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \quad (\text{L})$$

- så är också $\mathbf{X}_3(t) = c_1 \mathbf{X}_1(t) + c_2 \mathbf{X}_2(t)$ en lösning till systemet (L) för varje val av konstanterna c_1 och c_2 . (2p)

9. a) Bestäm stationära lösningar och deras stabilitet till $\frac{dx}{dt} = x(5 - x)$. (1p)

- b) Skissera fasporträttet till följande autonoma system:

$$\begin{cases} x'(t) = x(5 - x) \\ y'(t) = xy - y \end{cases} \quad (2p)$$

- c) Skissera fasporträttet till följande system givet i polära koordinater:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(5 - r) \\ \frac{dq}{dt} = -1 \end{cases} \quad (1p)$$

Fasporträtten i b) och c) ska visa eventuella stationära lösningar och deras karaktär samt ett representativt urval av övriga lösningskurvor.

10. Funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = \begin{cases} \frac{a}{i} & -1 < a < 1; \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

a) Bestäm $f(x)$. (2p)

b) Bestäm Fouriertransformen av $\frac{d^3 f}{dx^3}$ (2p)