

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III

Tentamen 13/4 2004 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 4 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från kontrollskrivningar och miniprojekt under kursens gång, samt minst 4 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.

För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från miniprojekt under kursens gång.

Endast bonuspoäng från 5B1212 kursomgång period 2 höstterminen 2003 får räknas.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Lycka till!

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + (x-1)e^{-y} = 0 \\ y(1) = \ln \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ange även lösningens existensintervall.

2. Bestäm samtliga fixpunkter till det tidsdiskreta dynamiska systemet (iterationsmodellen)

$$x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}. \text{ Bestäm också fixpunkternas stabilitet}$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$, när man vet $y(x) = e^x$ är en lösning.

4. Bestäm en partikulärlösning $y_p(x)$ till

$$y'' + 4y' + 4y = x^{3/2}e^{-2x}, \quad x > 0$$

genom att göra ansatsen $y_p(x) = u(x)e^{-2x}$.

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = yx - y \\ y' = x + y + x^2 \end{cases}$$

6. Bestäm en icke-konstant lösning till

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t), & t > 0, \quad 0 < x < 3, \\ u'_x(3,t) = 0, & t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

B-uppgifter

7. En viss populations storlek $P(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2}P \left(1 - \frac{P^2}{10^{10}} \right)$$

Vad kan man säga om populationsutveckling på lång sikt, och hur beror långtidsbeteendet på den initiala populationsstorleken $P(0)$?

8. Betrakta följande system

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

- a) Bestäm systemets allmänna lösning. (2p)

b) Beskriv banorna (=lösningskurvorna) i xyz-rummet i ord och med enkla skisser. Beakta speciellt fallen med banor som startar på z-axeln respektive i xy-planet, men beskriv också övriga banors utseende. (2p)

$$9. \text{ Låt } f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -p/2; \\ 1, & -p/2 \leq t \leq p/2; \\ 0, & p/2 < t < \infty; \end{cases}$$

- a) Bestäm f 's Fourierserie på intervallet $(-p, p)$. (2p)

b) Bestäm Fouriertransformen av f på $(-\infty, \infty)$, och ange också formeln för återtransformering. (Ett par olika definitioner av Fouriertransformen förekommer i litteraturen; du kan naturligtvis välja den du är bekant med.) (2p)

10. Konstruera ett 1:a ordningens initialvärdesproblem (en differentialekvation samt ett initialvärde) som har en lösning $y(x)$ som existerar på intervallet $(1, \infty)$ och sådan att $y(x)$ har det oegentliga gränsvärdet $+\infty$ när x går mot 1 från höger, dvs.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = +\infty.$$

