

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 13/4 2004. Svar och lösningsförslag.

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + (x-1)e^{-y} = 0 \\ y(1) = \ln \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ange även lösningens existensintervall.

Ekvationen är separabel och kan skrivas som $e^y dy = (1-x) dx$. Ledvis integration ger

$e^y = -(1-x)^2/2 + C$. Begynnelsevillkoret ger (sätt in $x=1, y=\ln 1/2$) att $C=1/2$. Alltså är $e^y = \frac{1-(1-x)^2}{2} = \frac{2x-x^2}{2} \Rightarrow y = \ln\left(\frac{2x-x^2}{2}\right)$. Denna lösningen genom punkten

$(1, \ln 1/2)$ är definierad så länge $\frac{2x-x^2}{2} > 0$ vilket är ekvivalent med att $x(2-x) > 0$ vilket i sin tur är ekvivalent med att $0 < x < 2$.

SVAR: $y = \ln\left(\frac{2x-x^2}{2}\right), 0 < x < 2$.

2. Bestäm samtliga fixpunkter till det tidsdiskreta dynamiska systemet (iterationsmodellen)

$$x_{n+1} = x_n e^{1-x_n}. \text{ Bestäm också fixpunkternas stabilitet.}$$

För ett tidsdiskret dynamiskt system $x_{n+1} = f(x_n)$ ges fixpunkter som lösningar till ekvationen $x = f(x)$, i detta fall ekvationen $x = x e^{1-x}$. $x_1 = 0$ är en lösning till denna ekvation. Om $x \neq 0$ fås ekvationen $1 = e^{1-x}$, med lösning $x_2 = 1$.

Fixpunkterna stabilitet undersöks med hjälp av $f'(x) = e^{1-x} - x e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$.

$|f'(0)| = e > 1 \Rightarrow$ (enligt sats) $x_1 = 0$ är en instabil (repellerande) fixpunkt.

$|f'(1)| = 0 < 1 \Rightarrow$ (enligt sats) $x_2 = 1$ är en stabil (attraherande) fixpunkt.

SVAR: $x_1 = 0$ är en instabil (repellerande) fixpunkt, $x_2 = 1$ är en stabil (attraherande) fixpunkt. Systemet har inga andra fixpunkter.

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$, när man vet $y(x) = e^x$ är en lösning.

Ekvationen har karakteristisk ekvation $r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = 0$. Eftersom $y_1(x) = e^x$ är en lösning, har den kar. ekv. en rot $r = 1 \Leftrightarrow (r - 1)$ är en faktor i vänsterledet.

Polynomdivision ger att vänsterledet kan faktoriseras, och ekvationen skrivs

$(r - 1)(r^2 - 2r + 2) = 0$, så kar. ekv. övriga två rötter ges av $r = 1 \pm i$, som svarar mot två lösningar $y_2(x) = e^x \cos x$ och $y_3(x) = e^x \sin x$ till den givna differentialekvationen. Allmän lösning fås genom superposition

SVAR: Allmän lösning är $y(x) = (A + B \cos x + C \sin x)e^x$, A , B , och C godtyckliga reella konstanter.

4. Bestäm en partikulärlösning $y_p(x)$ till

$$y'' + 4y' + 4y = x^{3/2}e^{-2x}, \quad x > 0$$

genom att göra ansatsen $y_p(x) = u(x)e^{-2x}$.

Ansatsen $y_p = ue^{-2x}$ ger

$$y'_p = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x} \text{ och } y''_p = u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}.$$

y_p är nu en lösning om och endast om

$$(u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}) + 4(u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}) + 4ue^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$$

som förenklas till den ekvivalenta ekvationen $u''e^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$ som i sin tur är ekvivalent med att $u'' = x^{3/2}$. Två successiva integreringar (där vi nonchalerar integrationskonstanter eftersom vi

endast söker en partikulärlösning) får vi $u(x) = \frac{4}{35}x^{7/2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{4}{35}x^{7/2}e^{-2x}$.

SVAR: $y_p(x) = \frac{4}{35}x^{7/2}e^{-2x}$ är en partikulär lösning på angiven form.

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = yx - y \\ y' = x + y + x^2 \end{cases}$$

Kritiska punkter är per definition lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} yx - y = 0 \\ x + y + x^2 = 0 \end{cases},$$

där den första ekvationen har de uppenbara lösningarna $x = 1$ eller $y = 0$, och inga andra lösningar.

Om $x = 1$ är den andra ekvationen uppfylld omm $y = -2$.

Om $y = 0$ är den andra ekvationen uppfylld omm $x + x^2 = 0$ vilket i sin tur gäller omm $x = 0$ eller $x = -1$. Vi finner alltså tre kritiska punkter $(1, -2)$, $(0, 0)$ och $(-1, 0)$.

Dessa kritiska punkters karaktär undersöks med hjälp av systemets Jacobimatrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \partial P / \partial x & \partial P / \partial y \\ \partial Q / \partial x & \partial Q / \partial y \end{pmatrix}, \text{ där } \begin{cases} P(x, y) = yx - y \\ Q(x, y) = x + y + x^2 \end{cases}. \text{ Vi får}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} y & x - 1 \\ 1 + 2x & 1 \end{pmatrix}. \text{ Vi undersöker de kritiska punkterna en och en:}$$

$$(1, -2). \quad J(1, -2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Matrisen är triangulär, och vi kan läsa av egenvärdena på}$$

huvuddiagonalen; ett positivt och ett negativt egenvärde implicerar att $(1, -2)$ är en sadelpunkt.

$$(0, 0). \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad t = 0 + 1 = 1 > 0, \quad \Delta = 1, \quad t^2 - 4\Delta = -3 < 0 \text{ ger att}$$

$(0, 0)$ är en instabil spiral.

$$(-1, 0). \quad J(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \Delta = -2 \text{ ger att } (-1, 0) \text{ är en sadelpunkt.}$$

SVAR: Systemet har tre kritiska punkter, $(1, -2)$ och $(-1, 0)$ som är sadelpunkter (sådana är instabila) och en instabil spiral i $(0, 0)$.

6. Bestäm en icke-konstant lösning till

$$\begin{cases} u''_{xx}(x,t) = u'_t(x,t), & t > 0, \quad 0 < x < 3, \\ u'_x(3,t) = 0, & t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Vi antar lösningar av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Differentialekvationen separeras till

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = g \quad (\text{separationskonstant}).$$

Vi provar först med $g = -l^2, l > 0$. För X får vi då

ekvationen $X'' + l^2 X = 0$ som har lösningar $X(x) = A \cos lx + B \sin lx$. Villkoret $u(0,t) = 0, t > 0$ implicerar för en icke-konstant lösning att $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, så $X(x) = B \sin lx, B \neq 0 \Rightarrow X'(x) = Bl \cos lx$. Villkoret $u'_x(3,t) = 0, t > 0$ ger på motsvarande sätt att $X'(3) = 0 \Rightarrow \cos 3l = 0$, eftersom $B \neq 0, l \neq 0$, vilket ger

$$3l = \frac{p}{2} + np \Rightarrow l = \frac{p}{6} + \frac{np}{3}. \text{ Vi väljer } n = 0, B = 1 \text{ och får } X(x) = \sin px/6 \text{ hörande till } l = \frac{p}{6}, g = -l^2 = -\frac{p^2}{36}.$$

För T får vi då ekvationen $T' + \frac{p^2}{36}T = 0$, som har en lösning $T(t) = e^{-\frac{p^2}{36}t}$.

Vi hittar alltså en lösning $u(x,t) = X(x)T(t) = e^{-\frac{p^2}{36}t} \sin\left(\frac{p}{6}x\right)$.

(Vi behöver inte pröva med icke-negativ separationskonstant, vi har redan en lösning)

SVAR: T.ex. $u(x,t) = e^{-\frac{p^2}{36}t} \sin\left(\frac{p}{6}x\right)$

B-uppgifter

7. En viss populations storlek $P(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{2}P \left(1 - \frac{P^2}{10^{10}} \right)$$

Vad kan man säga om populationsutveckling på lång sikt, och hur beror långtidsbeteendet på den initiala populationsstorleken $P(0)$?

Ekvationen är autonom, och har stationära lösningar $P(t) = \text{konstant}$ som ges av

$$\frac{3}{2}P \left(1 - \frac{P^2}{10^{10}} \right) = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ eller } P = 10^5. \text{ De stationära lösningarna } P = 0 \text{ och}$$

$P = 10^5$ delar tP -planet, $P \geq 0$, i två horisontella band (varav det övre är uppåt obegränsat). Övriga lösningar rör sig inom ett av dessa band, p.g.a. av entydighet kan de inte korsa konstantlösningarna (eller varandra).

För att få en bild av övriga lösningars utseende tittar vi på riktningsfältet. Teckenstudium av ekvationens högerled visar att $\frac{dP}{dt} > 0$ så länge $0 < P < 10^5$, så lösningar i detta band är

monoton växande, och $\frac{dP}{dt} < 0$ när $P > 10^5$ vilket ger monotont avtagande lösningar i detta band.

Monotona, begränsade lösningar måste närma sig ett gränsvärde som i sin tur måste vara en konstantlösning.

SLUTSATS = SVAR: Varje positivt begynnelsevärde $P(0) > 0$ ger en lösning $P(t)$ sådan att $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 10^5$, dvs. populationen kommer att stabilisera sig på denna nivå, oavsett initialpopulationens storlek.

8. Betrakta följande system

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm systemets allmänna lösning.

b) Beskriv banorna (=lösningskurvorna) i xyz-rummet i ord och med enkla skisser. Beakta speciellt fallen med banor som startar på z-axeln respektive i xy-planet, men beskriv också övriga banors utseende.

a) Vi beräknar systemmatrisens egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} -3-l & 2 & 0 \\ -1 & -1-l & 0 \\ 0 & 0 & -2-l \end{vmatrix} = -(2+l) \begin{vmatrix} -3-l & 2 \\ -1 & -1-l \end{vmatrix} = -(2+l)(l^2 + 4l + 5)$$

som ger $l_1 = -2$, $l_{2,3} = -2 \pm i$.

Till $l_1 = -2$ beräknas (se läroboken) egenvektorn $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi får en lösning $\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Till det komplexkonjugerade paret $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ av egenvärden finner vi lösningar (se läroboken)

$$\mathbf{X}_2(t) = e^{-2t} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right\} \text{ och } \mathbf{X}_3(t) = e^{-2t} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right\}.$$

Allmän lösning fås genom superposition.

SVAR: $\mathbf{X}(t) = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + c_3 \mathbf{X}_3$, c_i godtyckliga reella tal, $\mathbf{X}_i$ som ovan, $i = 1, 2, 3$.

b) $\mathbf{X}_1$ beskriver en rörelse längs z-axeln, in mot den stationära lösningen i origo när $t \rightarrow +\infty$.

$\mathbf{X}_2$ och $\mathbf{X}_3$ rör sig bägge i en spiral i xy-planet, in mot origo när $t \rightarrow +\infty$. En allmän lösning är en superposition av dessa två rörelser, dvs. en spiral-rörelse längs ytan på en rät kon med z-axeln som huvudaxel med sin spets origo. Rörelsen går mot xy-planet och mot origo när $t \rightarrow +\infty$.

9. Låt $f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -p/2; \\ 1, & -p/2 \leq t \leq p/2; \\ 0, & p/2 < t < \infty; \end{cases}$

a) Bestäm f 's Fourierserie på intervallet $(-p, p)$.

b) Bestäm Fouriertransformen av f på $(-\infty, \infty)$, och ange också formeln för

återtransformering. (Ett par olika definitioner av Fouriertransformen förekommer i litteraturen; du kan naturligtvis välja den du är bekant med.)

9 a) Vi bestämmer Fourierkoefficienterna. Eftersom funktionen är jämn gäller att Fourierserien på

intervallet $(-p, p)$ är av formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) dt = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} dt = 1, \text{ och}$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos nx dt = \frac{2}{p} \int_0^{p/2} \cos nx dt = \frac{2}{p} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{p/2} = \frac{2}{np} \sin \frac{np}{2} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, \dots \\ 2/(np), & n = 1, 5, \dots \\ -2/(np), & n = 3, 7, \dots \end{cases}$$

SVAR (9 a): $f(t)$ har på $(-p, p)$ Fourierserien

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2}{(2m+1)p} \cos(2m+1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{p} \cos x - \frac{2}{3p} \cos 3x + \frac{2}{5p} \cos 5x + \dots$$

9 b) Fouriertransformen $F(w)$ definieras som $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt$ som i detta fall är

$$= \int_{-p/2}^{p/2} e^{-iwt} dt = \int_{-p/2}^{p/2} \cos wt + i \sin wt dt = 2 \int_0^{p/2} \cos wt dt = \frac{2 \sin(wp/2)}{w}$$

SVAR (9b): $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt = \frac{2 \sin(wp/2)}{w}$. Återtransformering fås genom

$$f(t) \sim \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(wp/2)}{wp} e^{iwt} dw.$$

10. Konstruera ett 1:a ordningens initialvärdesproblem (en differentialekvation samt ett initialvärde) som har en lösning $y(x)$ som existerar på intervallet $(1, \infty)$ och sådan att $y(x)$ har det oegentliga gränsvärdet $+\infty$ när x går mot 1 från höger, dvs.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} y(x) = +\infty.$$

Funktionen $y(x) = \frac{1}{x-1}$ har de önskade egenskaperna. Eftersom $y'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ uppfyller

y differentialekvationen $y' = -y^2$, och eftersom y s graf passerar genom punkten $(2,1)$ uppfyller y initialvillkoret $y(2) = 1$.

SVAR: T.ex.
$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$