Hans Thunberg
KTH Matematik

Svar och lösningsförslag till Tentamensskrivning 5B1212
Differentialekvationer och transformer III. Onsdag 17/12 2003

---

1. Ekvationen är linjär. Integrerande faktor ges av

$$\mu = e^{\int \sin t\, dt} = e^{-\cos t}.$$

Ledvis multiplikation med μ ger

$$e^{-\cos t}y' + (\sin t)e^{-\cos t}y = (\sin t)e^{-\cos t}.$$

Vänster led är nu som sig bör precis $\dfrac{d}{dt}\mu y$, dvs.

$$\frac{d}{dt}(e^{-\cos t}y) = (\sin t)e^{-\cos t}$$

som ger oss

$$(e^{-\cos t}y) = \int e^{-\cos t}\sin t\, dt = e^{-\cos t} + C$$

så

$$y(t) = 1 + Ce^{\cos t}.$$

Initialvillkoret ger att $0 = y(0) = 1 + Ce^{\cos 0} = 1 + Ce$ så $C = -e^{-1}$.

$$\boxed{\text{Svar: } y(t) = 1 - e^{-1+\cos t}}$$

---

2. Vi löser först motsvarande homogen ekvation. Den har karraktäristisk ekvation

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

som har en dubblrot $r = 1$. Vi får den homogena lösningen $y_h(x) = Ae^x + Bxe^x$. Vi bestämmer nu en partikulärlösning med s.k. variarion av parameterar, dvs. vi söker en lösning på formen $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ där $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = xe^x$. Enligt känt resultat fås u_1 och u_2 från ekvationerna

$$u_1' = \frac{-y_2 f}{W} \qquad \text{och} \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W},$$

där $f(x)$ är högerledet $f(x) = e^x/x$ och W är Wrosnkideterminanten

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Följsaktligen är

$$u_1' = \frac{-xe^x \cdot e^x/x}{e^2x} = -1 \qquad \text{så} \qquad u_1 = -x$$

och

$$u_2' = \frac{e^x \cdot e^x/x}{e^2x} = 1/x \qquad \text{så} \qquad u_2 = \ln|x|$$

och vi får

$$y_p(x) = -xe^x + xe^x \ln|x|$$

där vi kan stryka den första termen eftersom den är en homogen lösning.

$$\boxed{\text{Svar: } y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx + x\ln|x|)e^x}$$

---

3. Systemets matris är triangulär vilket medför arr egenvädena ges av diagonalelementen, så egenvädrena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$.
Till $\lambda_1 = 2$ finner är en egenvektor $\mathbf{K}_1$ en icke-triviallösning lösning till det homogena ekvatiosnsystem som har koefficientmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

så vi kan välja $\mathbf{K}_1 = (1, 0)$.
En egenvektor $\mathbf{K}_2$ hörande till $\lambda_2 = -1$ fås som en ick.triviallösning till systemet med matris

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi väljer $\mathbf{K}_2 = (1, -3)$.
Den allmäna homogena lösningen ges alltså av $\mathbf{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}$.
Initialvillkoret ger att $\mathbf{X}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ vilket implicerar att $-C_1 = C_2 = -2$.

$$\boxed{\text{Svar: } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} e^{-t}}$$

---

4. Sätt $y = x'$ så att $y' = x'' = \{\text{enligt den givna ekvationen}\} = 1 - x' - x^2 = 1 - y - x^2$. Detta ger systemet

$$\begin{cases} x' &= P(x,y) = y \\ y' &= Q(x,y) = 1 - y - x^2 \end{cases}$$

Vi bestämmer kritiska punkter: $P(x,y) = 0 \implies y = 0$. Insatt i $Q(x,y) = 0$ ger detta att $x = \pm 1$, så $(1,0)$ och $(-1,0)$ är de enda kritiska punkterna.
För att avgöra stabiliteten beräknar vi Jacobimatrisen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$$

$J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ med spår $\tau = -1 < 0$, determinant $\Delta = 2 > 0$ och $\tau^2 - 4\Delta = -7 < 0$, så $(1,0)$ är en stabil spiral.
$J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ determinant $\Delta = -2 < 0$ så $(-1,0)$ är en sadelpunkt.

$$\boxed{\text{Svar: } (1,0) \text{ är en stabil spiral och } (-1,0) \text{ är en sadelpunkt, och är därmed instabil.}}$$

---

5. Vi beräknar Fourierserien $F_h(x)$ för $h(x) = x$ på det angivna intervallet. Den sökta Fourierserien $F_f(x)$ fås sedan som $F_f(x) = F_h(x) - 1$.
Då $h(x)$ är en udda funktion är $F_h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$ där

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin 2nx \, dx = \left\{ U = x \quad V = -\tfrac{\cos 2nx}{2n} dU = dx \quad dV = \sin 2nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[-x\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2nx}{2n}\, dx = -\frac{2}{n\pi}\frac{\pi}{2}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Den näst sista likheten följer då $int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2nx}{2n}\, dx = 0$ eftersom intgrationen sker över ett helt antal perioder.
Vi får alltså

$$F_h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2nx$$

och

$$F_f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2nx.$$

$$\boxed{\text{Svar: } F_f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin 2nx.}$$

---

6. Vi söker lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Detta medför att

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t) \qquad \text{och} \qquad u_t(x,t) = X(x)T'(t).$$

Den givna ekvationen övergår i

$$cX''T = XT'$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c}\frac{T'}{T} = \{\text{V.L oberoende av } t, \text{ H.L. oberoende av } x\} = \text{konstant} = \gamma.$$

För $X(x)$ ger det ekvationen

$$X'' - \gamma X = 0$$

som har reella trigonometriska lösningar omm $\gamma = -\lambda^2 < 0$. Dessa blir då

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Med $\gamma = -\lambda^2 < 0$ får vi för T ekvationen

$$T' + c\lambda^2 T = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad T(t) = Ce^{-c\lambda^2 t}.$$

Vi får $u(x,t) = X(x)T(t) = e^{-c\lambda^2 t}(a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)$, där a och b är godtyckliga reella konstanter.

$$\boxed{\text{Svar: } u(x,t) = e^{-c\lambda^2 t}(a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)\,, \quad a, b, \in \mathbb{R}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.}$$

($\lambda = 0$ ger en linjär funktion X, som till nöds kan betraktas som en degenererad trigonometrisk funktion).

---

7. Låt $f(x) = k\dfrac{x}{1+x^2}$, $x \geq 0$.

a) Fixpunkter ges av icke-negativa lösningar till $f(x) = x$, dvs. $x = k\dfrac{x}{1+x^2}$. Vi ser omedlbart $x = 0$ är en lösning för alla k. Om $x \neq 0$ får vi

$$x^2 + 1 = k, \quad x > 0 \iff x = \sqrt{k-1}.$$

För $k < 1$ är den lösning ej reell, för $k = 1$ sammanfaller den med lösningen $x = 0$, och för $k > 1$ är detta en andra reell positiv fixpunkt.

b) Ett tillräckligt villkor för att en fixpunkt $x = p$ skall vara stabil är att $|f'(p)| < 1$. Vi beräknar $f'(p)$

$$f'(x) = k\frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = k\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Detta ger att

$$f'(0) = k$$

så $x = 0$ är stabil om $k < 1$. För $k > 1$ är $x = 0$ instabil, vi har i detta fall en andra fikpunkt att beakta:

$$f'(\sqrt{k-1}) = k\frac{1-(\sqrt{k-1})^2}{(1+(\sqrt{k-1})^2)^2} = k\frac{2-k}{k^2} = \frac{2-k}{k}.$$

Alltså är $x = \sqrt{k-1}$ stabil om $\left|\frac{2-k}{k}\right| < 1$, dvs. om

$$-1 < \frac{2-k}{k} < 1 \iff -k < 2-k < k \iff 0 < 2 < 2k$$

som är uppfyllt för alla $k > 1$.

c) För $k = 1$ är $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ så $f'(0) = 1$ och $f'(x) < 1$ för alla $x > 0$. Det innebär att grafen $y = f(x)$ tangerar linjen $y = x$ i Origo, och för $x > 0$ så ligger $y = f(x)$ under linjen $y = x$. Grafisk iteration (Rita figur!) ger att $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$ för alla $x_0 \geq 0$, dvs $x = 0$ är en globalt attrakiv fixpunkt, och oberoende av ionitialpopulationens storlek så dör populationen ut.

Svar: För $0 < k < 1$ är $x = 0$ den enda fixpunkten och den är stabil. För $k > 1$ finns det två fixpunkter: $x = 0$ (instabil) och $x = \sqrt{k-1}$ (stabil). För $k = 1$ är $x = 0$ den enda fixpunkten, som i detta fall är attraktiv och attraherar samtliga initialvärden. Populationen dör ut obereiende av initialpopulationens storlek.

---

8. a) Systemets matris har egenvärden λ som uppfyller

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0 \iff \lambda = 4 \pm 2i$$

. Man beräknar en komplex egenvektor hörande till $\lambda = 4 + 2i$ till

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger (se läroboken)

Svar: $\mathbf{X}(t) = e^{4t}\left(c_1\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\sin 2t\right\} + c_2\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right)$.

b) Se läroboken

9.
a) Staionära lösningar fås som lösningar till $\dfrac{dx}{dt} = 0$ som ger $x = 0$ och $x = 5$. Riktingsfältsanalys (Rita figur!) ger att $x = 0$ är instabil och $x = 5$ är stabil.
b) Vi bestämmer först kritiska punkter. $\dfrac{dx}{dt} = 0$ medför att $x = 0$ och $x = 5$, och insatt i $\dfrac{dy}{dt} = 0$ ger det i bägge fallen att $y = 0$. Vi har alltså två kritiska punkter $(0,0)$ och $(5,0)$.
Jacobimatrisen beräknas till

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 5-2x & 0 \\ y & x-1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger att

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies (0,0) \text{ är en sadelpunkt}$$

och

$$J(5,0) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies (5,0) \text{ är en också en sadelpunkt.}$$

Vi observerar sedan att

- $x(t) \equiv 0$ uppfyller den första ekvationen, och att den andra ekvationen då lyder $\dfrac{dy}{dt} = -y$ så att $y(t) = Ce^{-t}$ i detta fall. Detta ger lösningskurvor längs y-axeln som går mot $(0,0)$ då $t \to \infty$.
- $x(t) \equiv 5$ uppfyller den första ekvationen, och att den andra ekvationen då lyder $\dfrac{dy}{dt} = 4y$ så att $y(t) = De^{4t}$ i detta fall. Detta ger lösningskurvor längs linjen $x = 5$ som går mot $(5,0)$ då $t \to -\infty$.
- $y(t) \equiv 0$ uppfyller den andra ekvationen, och att $x(t)$ helt styrs av den första ekvationen. Detta ger ett fasporträtt på x-axeln enligt deluppgift a)
- detta visar precis hur de "inåtgående" och de "utåtgående" kurvorna från de sadelpunkterna ser ut (Rita figur!).

För att göra analysen fullständig kan vi vidare konstatera att

- På linjen $x = 1$ gäller att $\dfrac{dy}{dt} = 0$ och att $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$. Detta betydr att lösningskurvor som korsar linjen $x = 1$ gör det med horisontell tangent.
- xy-planet delas in åtta sektorer av linjerna $x = 0$, $x = 1$, $x = 5$ och $y = 0$. I var och en av dessa har $\dfrac{dx}{dt}$ och $\dfrac{dy}{dt}$ konstant tecken, vi kan i var och en av sektorerna såga om lösningskurvor går i växande/avtagande x- repektive y-riktning.
- Sammanställ nu detta till en figur!

c) Vi ser att ekvationen för r är identisk med ekvationen i deluppgift a).
Av detta följer att $r \equiv 0$ är en instabil stationär lösning, dvs. origo $(x,y) = (0,0)$ är en instabil stationär punkt (vinkelvariabeln θ spelar ingen roll i detta fall).

Om $r > 0$ kommer $r(t)$ att attraheras av den stabila stationära lösningen $r \equiv 5$, och ekvationen för θ kan direkt integreras till $\theta(t) = -t + \theta_0$. Detta betyder att

- alla lösningar där $r \neq 0$ roterar medurs med konstant vinkelhastighet
- cirkeln $r = 5$ är en sluten lösningskurva, är lösningarna roterar medurs
- lösningskurvor med $r \neq 0, 5$ bildar spiraler som roterar in mot/ ut mot cirkeln $r = 5$. Rita figur!

10.
a)

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\alpha)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\alpha e^{-i\alpha x}\,d\alpha$$

$$= \begin{Bmatrix} U = \alpha & V = -\frac{e^{-i\alpha x}}{ix} \\ dU = d\alpha & dV = e^{-i\alpha x}\,d\alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\left[-\alpha\frac{e^{-i\alpha x}}{ix}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-i\alpha x}}{ix}d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi x}\left[\alpha e^{-i\alpha x}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2\pi x}\int_{-1}^{1} -e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{2\pi x}\left[\alpha e^{-i\alpha x}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2\pi x}\left[\frac{e^{-i\alpha x}}{ix}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi x}\left[\alpha e^{-i\alpha x}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2\pi i x^2}\left[e^{-i\alpha x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi x}\left(e^{-ix} + e^{ix}\right) + \frac{1}{2\pi i x^2}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi x}2\cos x + \frac{1}{2\pi i x^2}(-2i\sin x) = \frac{x\cos x - \sin x}{\pi x^2}$$

b) Vi vet att $\mathcal{F}\left\{f'(x)\right\} = -i\alpha\mathcal{F}\left\{f(x)\right\} = -i\alpha F(\alpha)$. Det följer att

$$\mathcal{F}\left\{f'''(x)\right\} = (-i\alpha)^3 F(\alpha) = i\alpha^3 F(\alpha) = \begin{cases} \alpha^4 & -1 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}.$$

Svar: *a)* $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{\pi x^2}$ *b)* $\mathcal{F}\left\{f'''(x)\right\} = \begin{cases} \alpha^4 & -1 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}.$
