KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 12/1 2005 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 4 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 4 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen.
Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

OBS: Vid detta tentamenstillfälle får endast *bonuspoäng från kursomgången VT04, period 4, tillgodoräknas*.

Inga hjälpmedel tillåtna. *Lycka till!*

A-uppgifter

1. Lös initialvärdesproblemet $t\dfrac{dP}{dt} + 3P = 4t$, $P(-1) = 0$, och ange lösningens existensintervall.

2. Bestäm samtliga lösningar till $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

3. Bestäm alla stationära lösningar till systemet $\begin{cases} x' = 1 + xy \\ y' = x + y \end{cases}$ och klassificera dem med avseende på typ och stabilitet.

4. a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (1p)

   b) Skissera systemets fasporträtt. I fasporträttet skall speciellt anges den bana som bestäms av villkoret $(x(0), y(0)) = (1,2)$. (2p)

5. Bestäm Fouriertransformen till $g(t) = f(t)\cos\Omega t$ där vi antar att $f(t)$ är en känd funktion med en känd Fouriertransform $\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$.

   (Signalen $g(t) = f(t)\cos\Omega t$ kan tänkas uppkomma genom att man *amplitudmodulerar* $h(t) = \cos\Omega t$ med funktionen $f(t)$, dvs cosinusfunktionen ges en tidsberoende amplitud f.)

6. Betrakta följande ekvationer:

$$\begin{cases} (1) \quad 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad t > 0, 0 < x < p; \\ (2) \quad u(0,t) = u(p,t) = 0, \quad t > 0; \\ (3) \quad u(x,0) = \sin 2x, \quad 0 < x < p; \\ (4) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1, \quad 0 < x < p. \end{cases}.$$

Man har funnit att funktionerna $u_n(x,t) = (c_n \cos 2nt + d_n \sin 2nt)\sin nx$ löser ekvationerna **(1)** och **(2)** för $n = 1,2,3,\dots$. Slutför lösningen.

B-uppgifter

7. En djurpopulations storlek som funktion av tiden beskrivs av en funktion $P(t)$ som antas vara bestämd av differentialekvationen $\dfrac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)$, där a och b är positiva konstanter, och av initialvärdet $P(0) = P_0 > 0$.

a) Beskriv med ord hur djurpopulationens storlek utvecklar sig över tiden och hur detta beteende beror på initialvärdet P_0. (2p)

b) Bestäm $P(t)$ då $a = 3$, $b = 2$ och $P(0) = 10$ (2p)

8. Låt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ och låt $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm den allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ (2p)

b) Bestäm en stationär lösning till $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$ (1p)

c) Bestäm samtliga lösningar till $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$ (1p)

9. Låt $g(x) = \sin x / x$, $x \neq 0$, och $g(0) = 1$. Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ixt}\,dx = \begin{cases} p, & |t| < 1; \\ p/2, & |t| = 1; \\ 0 & |t| > 1. \end{cases}$$

10. Beskriv samtliga lösningskurvor i xy-planet till systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x^3y^2 \end{cases}$.

Svaret kan redovisas i form av ett kommenterat fasproträtt. Glöm inte att också redovisa din lösningsmetod och dina resonemang.