5B1212 HT04
KTH Matematik

Inlämningsuppgift

Instruktioner

Denna uppgift kan ge maximalt 2 B-bonus till den avslutande tentan.

Uppgiften syftar till att komplettera framställningen av teorin för homogena linjära differentialekvationer. Framställningen i läroboken i kapitel 4.1 och 8.1 är kortfattad, och de flesta bevis utlämnas. I nedanstående uppgifter ska du reflektera över och komplettera denna framställning på en punkt.

Du skall skriva arbetet självständigt. Naturligtvis får du söka hjälp i litteraturen och i diskussioner med dina kamrater, men var och en skall formulera sina egna bevis.

Texten skall skrivas som en sammanhållen framställning med fullständiga meningar. Införda beteckningar skall definieras. Texten skall vara väl läsbara för studenter med förkunskaper jämförbara med er egna.

Att kopiera text från kamrater, litteraturen, webben eller dylikt är absolut inte tillåtet, och betraktas som fusk.

Uppgiften kommer eventuellt att diskuteras vid ett senare övningstillfälle. Var och en som deltar i inlämningsuppgiften skall då vara beredd att muntligen redogöra för sina lösningar.

* * *

Inledning

Uppgiften berör frågor kring följande sats.

Sats (Thm 8.4 i ZC): *Låt* $I=(a,b)$, $a<b$ *, vara ett intervall på reella axeln. Låt* $\mathbf{A}(t)=(a_{i,j}(t))$ *vara den* $n\times n$ *matris som har element* $a_{i,j}(t)$ *, och antag att funktionerna* $a_{i,j}(t)$, $1\le i,\, j\le n$ *, samtliga är kontinuerliga på intervallet* I.

Då har det homogena ekvationssystemet

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}$$

n *stycken linjärt oberoende lösningar* $\{\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t),\ldots\mathbf{X}_n(t)\}$ *på intervallet* I.

Uppgifter

1. Hela avsnitt 8.1 i läroboken handlar ju om system av första ordningens linjära differentialekvationer i allmänhet, under vilka förutsättningar lösningar till sådana system existerar, när lösningen är entydigt bestämd, och om lösningarnas struktur.

Reflektera kortfattat (ett korrekt svar behöver inte vara mer än några meningar långt) över ovanstående sats roll i detta teoribygge. Varför har man tagit med denna sats? Fyller den en viktig roll i teorin? Skulle den övriga framställningen i avsnitt 8.1 stå sig lika bra utan denna sats? (½ B-poäng)

2. I avsnitt 4.1 i läroboken behandlas teorin för högre ordningens linjära ordinära differentialekvationer. Som lärare skulle man kunna överväga att behandla avsnitt 8.1 före avsnitt 4.1 med argumentet att det som står i 4.1 är ett specialfall av det som står i 8.1.

Exemplifiera detta genom att bevisa att Thm 4.4 i Zill-Cullen följer av Thm 8.4; du kan om du vill begränsa dig till fallet med en andra ordningens ekvation. (1 B-poäng)

3. Bevisa Theorem 8.4. Du kan om du vill begränsa dig till fallet $n = 2$.

(Tips: Beviset utnyttjar bl.a. Theorem 8.1 och Theorem 8.3) (½ B-poäng)