5B1212 HT04 CL

Projekt Minilektioner

Er uppgift är att hålla en minilektion på 10-15 min på det av nedanstående teman som ni får er förelagt. Lektionen hålls för en grupp av två eller tre kurskamrater samt en av lärarna på kursen. Ni lyssnar också förstås på era kamraters minilektioner.

Framställningen ska anpassas till era kurskamrater; se er själva som lärare som ska undervisa era kamrater om det förelagda ämnet.

Eftersom det är ganska knappt om tid är det lämpligt att förbereda t ex illustrationer på OH-blad. Vissa illustrationer kan vara lämpliga att göra för hand, i andra fall kan programvara som t ex *Maple* vara till hjälp.

Detta moment ger maximalt 2 A-bonuspoäng och 2 B-bonuspoäng till den avslutande tentan.

Poängkriterier:

1 A-bonus fås för en genomförd presentation enligt nedanstående beskrivning, förutsatt att presentationen inte har allvarliga matematiska eller pedagogiska brister.

2 A-bonus fås om presentationen dessutom är till största delen matematiskt korrekt och pedagogiskt väl genomförd

1 B-bonus fås om matematiska symboler och matematisk terminologi används på ett korrekt och ändamålsenligt sätt, och om framställningen visar på en god teori- och begreppsförståelse.

2 B-bonus fås om framställningen behandlar samtliga delfrågor på ett korrekt sätt och är mycket väl genomförd vad gäller teori, språkbruk, notation, terminologi och presentation.

Uppgifter 1. Newton (Newton-Raphsons) metod.

Som bekant är Newton (Newton-Raphsons) metod ett sätt att numeriskt bestämma approximativa lösningar till en ekvation $f(x)=0$. Metoden bygger på att man utgående från en initial uppskattning x_0 av den sökta roten successivt beräknar bättre och bättre approximationer genom att *iterera* en viss annan funktion, låt oss kalla den $N_f(x)$.

a) Härled formeln $N_f(x)$ för Newtons metod (detta kan du säkert finna i t ex din gymnasielitteratur eller i någon bok i envariabelanalys)

b) Förklara sambandet mellan lösningar till $f(x)=0$ och fixpunkter till $N_f(x)$ och dessa fixpunkters stabilitetsegenskaper. Bevisa dina påståenden! Vilka förutsättningar behöver du göra?

c) Newtons metod bygger ju på att man gör en hyfsad gissning till den sökta lösningen. Förklara, t.ex utifrån en ekvation med flera lösningar hur valet av initial gissad lösning påverkar utfallet av metoden.

d) Använd *Maple* för genomföra Newtons metod på ett lämpligt exempel. På kurshemsidan finns ett exempel på hur man kan använda *Maple* för iterativa beräkningar.

Uppgift 2. Linjära första ordningens ordinära differentialekvationer.

Betrakta ekvationen $y' + p(x)y = 0$.

a) Visa att $y(x)$ är en lösning till denna ekvation om och endast om $y(x) = Ce^{-P(x)}$, där C är en godtycklig konstant och $P(x)$ är en primitiv funktion till $p(x)$.

Tanken är att du skall ge ett fullständigt bevis som är lämpligt i kurs E på gymnasiet, och som inte hänvisar till andra, bevisade eller obevisade, satser i Zill-Cullen.

Tips:
(i) Visa först $y_1(x) = Ce^{-P(x)}$ är en lösning.
(ii) Antag sedan att $y_2(x)$ också är en lösning till $y' + p(x)y = 0$. Argumentera för att $y_2(x)$ kan skrivas $y_2(x) = z(x)e^{-P(x)}$, och bestäm därefter $z(x)$.

b) Visa utifrån a), och utan att hänvisa till andra satser i Zill-Cullen, att under lämpliga förutsättningar så har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + p(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

en och endast en lösning. För vilka punkter (x_0, y_0) gäller detta? Vilka antaganden behöver du göra? Vad kan man säga om lösningens existensinterval?

c) Gör en principskiss som sammanfattar resultaten i a) och b).

d) Gör ett illustrativt exempel m h a *Maple*. Tips på hur man använder *Maple* i dessa sammanhang finns på kurshemsidan.

Uppgift 3: RC-kretsar

En seriell elektrisk RC-krets består av en spänningskälla med varierande spänning $E(t)$, ett motstånd med konstant resistans R och en kondensator med konstant kapacitans C. Laddningen i kondensatorn betecknas $q(t)$, och strömmen genom kretsen betecknas $i(t)$. Det gäller då att $i(t) = q'(t)$.

För en given spänningskälla, där $E(t)$ är en känd funktion, vill man bestämma $q(t)$ (och därmed $i(t)$). Laddningen $q(t)$ bestäms av initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = E(t) \\ q(t_0) = q_0 \end{cases} \qquad (1)$$

a) Redogör kort för härledningen av ekvation (1); se Zill-Cullen sidan 27 (5:e upplagan).

Du skall nu redogöra för hur lösningen $q(t)$ till (1) beror av initialvärdet q_0 .

b) Visa att lösningen till (1) kan skrivas som $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, där $q_1(t)$ inte beror på $q_{0,}$ och $q_2(t)$ (som beror på $q_{0,}$) är *transient*, dvs $\lim_{t\to\infty} q_2(t) = 0$.

c) Tolka resultatet i b). Hur påverkas laddningen $q(t)$ i det långa loppet av den initiala laddningen $q_{0,}$?

d) Illustera genom att göra några experiment i t.ex. *Maple.* Tips på hur man använder *Maple* i dessa sammanhang finns på kurshemsidan.

Förslag: Välj $R = 1$, $C = 0.1$ och högerledet $E(t) \equiv 1$. Plotta de lösningskurvor som ges av initialvärden $q(0) = 0.2$, $q(0) = 0$, $q(0) = -0.1$ och $q(0) = -0.2$ över tidsintervallet $0 \le t \le 1$.
Upprepa experimentet med ett par andra högerled. ($E(t) = t$ respektive $E(t) = \sin(10t)$, med samma initialvärden, tidsintervall och värden på R och C som ovan är exempel som enkelt ger goda numerisk resultat i *Maple*)