Hans Thunberg
KTH Matematik

5B1212
VT04

Kontrollskrivning 1, tillfälle 2. Svar och lösningsförslag (A-version)

1. Bestäm alla funktioner $U(t)$ som löser initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = 3U + 9 \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

Ekvationen är linjär (även seprabel), standardform $\dfrac{dU}{dt} - 3U = 9$. Genom att multiplicera bägge led med integrerande faktor $m = e^{\int -3\,dt} = e^{-3t}$ fås ekvationen

$$e^{-3t}\frac{dU}{dt} - 3e^{-3t}U = 9e^{-3t} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{-3t}U\right] = 9e^{-3t}$$

Integrering av bägge led ger

$$e^{-3t}U = -3e^{-3t} + C \Leftrightarrow U(t) = -3 + Ce^{3t}.$$

Initalvärdet $U(0) = 0$ ger $0 = -3 + Ce^{0} \Rightarrow C = 3$

<u>SVAR (A-version):</u> $U(t) = 3(e^{3t} - 1)$ <u>SVAR (B-version):</u> $P(x) = 2(e^{2x} - 1)$

---

2. $y = y_1(x)$ och $y = y_2(x)$ är båda lösningar till en differentialekvation av formen

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 1$ (*)

där *p* och *q* är kontinuerliga funktioner på hela reella axeln.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Glöm inte att motivera dina svar.

i) $y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$ är också en lösning till (*).

ii) $y_4(x) = y_1(x) - y_2(x)$ är en lösning till ekvationen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

i) $y_3(x)$ insatt i vänsterled av (*)

$$(y_1(x) + y_2(x))'' + p(y_1(x) + y_2(x))' + q(y_1(x) + y_2(x)) =$$
$$\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + \left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) = \{\text{enligt } (*)\} = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$y_3(x)$ löser alltså *inte* (*)

ii) $y_4(x) = y_1(x) - y_2(x)$ insatt i VL av $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ger

$$(y_1(x)-y_2(x))'' + p(y_1(x)-y_2(x))' + q(y_1(x)-y_2(x)) =$$
$$\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) - \left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) = \left\{\text{enligt } (*)\right\} = 1-1=0$$

dvs. $y_4(x)$ uppfyller den givna homogena ekvationen.

<u>SVAR (A-version):</u> (i) är FALSKT (ii) är SANT
<u>SVAR (B-version):</u> (i) är SANT (ii) är FALSKT (påstående står i omvänd ordning)