Hans Thunberg
KTH Matematik

5B1212
VT04

Kontrollskrivning 1. Svar och lösningsförslag (A-version)

1. Bestäm alla funktioner $T(x)$ som löser initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = \dfrac{x^3}{e^{4T}} \\ T(0) = 0 \end{cases} .$$

Ekvationen är separabel. Separation ger

$$e^{4T}\,dT = x^3 dx \quad \Rightarrow \quad \int e^{4T}\,dT = \int x^3 dx \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{4T}}{4} = \frac{x^4}{4} + C \quad \Rightarrow \quad e^{4T} = x^4 + C_1$$

Initialvillkoret ger att $e^0 = 0 + C_1$, dvs. $C_1 = 1$. Alltså får vi att $e^{4T} = x^4 + 1$.

$$\Rightarrow \quad T(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1)$$

<u>Svar (A-version):</u> $T(x) = \frac{1}{4}\ln(x^4 + 1)$ <u>Svar (B-version):</u> $P(t) = \frac{1}{6}\ln(t^6 + 1)$

---

2. $y_1 = x^3$ och $y_2 = \dfrac{1}{x^2}$ är två lösningar till differentialekvationen

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0$$

på intervallet $I = (0, \infty)$. (Detta behöver ej visas.)
Ange differentialekvationens allmänna lösning på I. Svaret skall motiveras väl utifrån i läroboken formulerade satser.

Den givna differentialekvationen är linjär, homogen och av andra ordningen.

Teorin säger oss: Om $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ är n st. linjärt oberoende lösningar på ett intervall I till en n:te ordningens linjär, homogen differentialekvation, så utgörs hela lösningsmängden (den allmänna lösningen) precis av de funktioner som kan erhållas som linjärkombinationer

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \text{ för godtyckliga konstanter } c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

De givna lösningarna är linjärt oberoende på $I = (0, \infty)$, ty

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x^3}{1/x^2} = x^5 \neq \text{konstant}.$$

Följaktligen ges den allmänna lösningen till den givna ekvationen av $y(x) = c_1 x^3 + \dfrac{c_2}{x^2}$