Hans Thunberg
KTH Matematik

Kontrollskrivning 2. Svar och lösningsförslag (A-version)

1. Bestäm en partikulärlösning $y_p(x)$ till $y'' + 4y' + 4y = x^{3/2}e^{-2x}$, $x > 0$, genom att göra ansatsen $y_p(x) = u(x)e^{-2x}$

Ansatsen $y_p = ue^{-2x}$ ger

$y_p' = u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}$ och $y_p'' = u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}$.

y_p är en lösning om och endast om

$$(u''e^{-2x} - 4u'e^{-2x} + 4ue^{-2x}) + 4(u'e^{-2x} - 2ue^{-2x}) + 4ue^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$$

som förenklas till den ekvivalenta ekvationen $u''e^{-2x} = x^{3/2}e^{-2x}$ som i sin tur är ekvivalent med att $u'' = x^{3/2}$. Två successiva integreringar (där vi nonchalerar integrationskonstanter eftersom vi endast söker en partikulärlösning) får vi

$u(x) = \dfrac{4}{35}x^{7/2} \quad \Rightarrow y_p(x) = \dfrac{4}{35}x^{7/2}e^{-2x}$ = :<u>Svar (A-version)</u>

<u>Svar (B-version):</u> $\underline{y_p(x) = \dfrac{4}{15}x^{5/2}e^{-3x}}$

2. Bestäm $x(t)$ och $y(t)$ som löser $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

Med $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ skrivs systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$. Systemmatrisens egenvärden ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 6 - l & -5 \\ 3 & -2 - l \end{vmatrix} = l^2 - 4l + 3 \quad \Rightarrow \quad l = 2 \pm 1$$

Egenvärdet $l_1 = 3$ svarar mot egenvektorer $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ sådana att $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

vi väljer $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ som svara mot en lösning $\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}e^{3t}$.

Vi ser att $\mathbf{X}_1(t)$ uppfyller det givna initialvillkoret $\mathbf{X}_1(0)=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

<u>Svar (A-version):</u> $x(t)=5e^{3t}$, $y(t)=3e^{3t}$. <u>Svar (B-version):</u> $x(t)=2e^{t}$, $y(t)=-e^{t}$.