Hans Thunberg
KTH Matematik

5B1212
VT04

Kontrollskrivning 3. Svar och lösningsförslag (A-version)

1. Bestäm alla kritiska punkterna $\neq (0,0)$ till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x^2 - 4y^2 \\ y' = x - y^2 \end{cases}$$

och bestäm deras typ och stabilitet.

Kritiska punkter ges av $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 & (1) \\ x - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$. Ekvation (2) $\Leftrightarrow$ $y^2 = x$, vilket vi använder för att eliminera *y* ur (1), som då övergår i $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 4$.
Ekvation (2) ger motsvarande värden för *y* och vi finner tre kritiska punkter $(0,0),(4,2),(4-2)$. Vi bortser från $(0,0)$.

Systemets Jacobimatris är $J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -8y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$, som vi använder för att bestämma de kritiska punkternas stabilitet.

$J(4,2) = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, med egenvärden som ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 8-l & -16 \\ 1 & -4-l \end{vmatrix} = l^2 - 4l - 16 \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 \pm \sqrt{4+16} = 2 \pm \sqrt{20}$$

, dvs. ett positivt och ett negativt egenvärde $\Rightarrow (4,2)$ är en sadelpunkt .

$J(4,-2) = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärden som ges av

$$0 = \begin{vmatrix} 8-l & 16 \\ 1 & 4-l \end{vmatrix} = l^2 - 12l + 16 \quad \Leftrightarrow \quad l = 6 \pm \sqrt{36-16} = 6 \pm \sqrt{20}$$

, dvs två positiva egenvärden $\Rightarrow (4,-2)$ är en instabil nod.

<u>SVAR (A-version):</u> $(4,2)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(4,-2)$ är en instabil nod.
<u>SVAR (B-version):</u> $(2,4)$ är en sadelpunkt och därmed instabil. $(-2,4)$ är en stabil nod.

---

2. Bestäm Fourier-cosinusserien till $f(x) = 2x$ på intervallet $(0, \pi)$.

Serien har formen $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ där

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x = \frac{2}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi} = 2\pi \quad \text{och}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx\,dx = \{\text{partiell integration}\} = \frac{4}{n\pi}\left[x\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

<u>SVAR (A-version):</u> $\pi - \dfrac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}$

<u>SVAR (B-version):</u> $\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2m-1)\pi x}{(2m-1)^2}$