Hans Thunberg
KTH Matematik
5B1212
VT04

Kontrollskrivning 4. Svar och lösningsförslag (A-version)

1. Bestäm Fouriertransformen $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 2; \\ 2, & t = 0 \text{ eller } 2; \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > 4; \end{cases}$

och skriv sedan f som en Fourierintegral.

Fouriertransformen ges av

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\, dt = \int_{0}^{2} 4e^{-iwt}\, dt = 4\left[\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right]_0^2 = \frac{4}{iw}\left(1 - e^{-2iw}\right).$$

f:s Fourierintegral ges av

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{iw}\left(1 - e^{-2iw}\right)e^{iwt}\, dw = \frac{2}{ip}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-2iw}\right)e^{iwt}}{w}\, dw$$

<u>Svar (A-version):</u> $\hat{f}(w) = \frac{4}{iw}\left(1 - e^{-2iw}\right)$ och $f(t) = \frac{2}{ip}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-2iw}\right)e^{iwt}}{w}\, dw$

<u>Svar (B-version):</u> $\hat{f}(w) = \frac{2}{iw}\left(1 - e^{-5iw}\right)$ och $f(t) = \frac{1}{ip}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-5iw}\right)e^{iwt}}{w}\, dw$

2. Finn en funktion $u(x,t)$ sådan att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial t} \\ u(x,0) = 3\sin 4x \end{cases}$$

Vi söker lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. En sådan lösning uppfyller då

$X''T = 2XT' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = 2\frac{T'}{T}$. Eftersom VL här är oberoende av t, och HL obereoende av x, måste då gälla att för någon konstant k att $\frac{X''}{X} = 2\frac{T'}{T} = k \Leftrightarrow \begin{cases} X'' = kX \\ T' = \frac{k}{2}T \end{cases}$.

T-ekvationen ger att $T(t) = Ce^{\frac{k}{2}t}$, så $u(x,t) = Ce^{\frac{k}{2}t}X(x)$.

Ekvationen för X ger sinus-lösningar om vi väljer $k = -l^2 < 0$, $X(x) = \sin lx$ är då en lösning.

Vi väljer $l = 4 \Rightarrow k = -l^2 = -16$, och får då $u(x,t) = Ce^{-8t} \sin 4x$

Begynnelsevillkoret ger att

$3\sin 4x = u(x,0) = C \sin 4x$, vi väljer $C = 3$ och får $u(x,t) = 3e^{-8t} \sin 4x$

<u>Svar (A-version):</u> $u(x,t) = 3e^{-8t} \sin 4x$

<u>Svar (B-version):</u> $u(x,t) = -2e^{-4t} \sin 6x$