KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 26/5 2004 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 4 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.
För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från kontrollskrivningar och miniprojekt under kursens gång, samt minst 4 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från miniprojekt under kursens gång
Inga hjälpmedel tillåtna.

A-uppgifter

1. En djurpopulations storlek som funktion av tiden beskrivs av en funktion $P(t)$ som antas vara bestämd av differentialekvationen $\dfrac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)$, där a och b är positiva konstanter, och av initialvärdet $P(0) = P_0 > 0$.
   Bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

2. Bestäm alla $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sådana att $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

3. Finn alla stabila kritiska punkter till systemet $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + x^2 + xy \end{cases}$.

4. Bestäm Fourierserien till funktionen f som ges av att
   (i) $f(t) = t$ för $1 \le t < 3$ och
   (ii) f är periodisk med periodlängd $T = 2$.
   (Du kan välja om du vill använda komplex eller reell trigonometrisk form)

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = e^{-t}\ln t$
   (Du kan ha nytta av formeln
   $\int t^n \ln t\, dt = \dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ för $n = 0,1,2,\dots$)

6. Bestäm alla funktioner $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \quad \text{och} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.$$

B-uppgifter

7. a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = xy - x$. (2p)

b) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $\dfrac{du}{dx} + xu = xu^2$.

Tips: Substitutionen $u = y^{-1}$ för $u \neq 0$ hjälper dig en bit på vägen. (2p)

8. En partikel rör sig i xy-planet. Vid $t = 0$ startar den i punkten $(1,1)$, och vid tidpunkter $t > 0$ befinner den sig i punkten $(x(t), y(t))$, där $(x(t), y(t))$ uppfyller $\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

Beskriv partikelns bana genom att

a) bestämma funktionerna $x(t)$ och $y(t)$; (2p)

b) göra en enkel men principiellt korrekt skiss av banans utseende. (2p)

9. a) Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le a \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > a \end{cases}$$

där a är en positiv konstant. Ange också formeln för f:s Fourierintegral. (2p)

b) Fouriertransformera funktionen $h(t)$ när man vet att $h(t) = (t-1)g(t-1)$ och att $g(t)$ har Fouriertransformen $\hat{g}(w) = \dfrac{i}{1+w^2}$. (2p)

10. Funktionerna $\Phi_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,N$ är kontinuerliga på intervallet $[a,b]$ och sådana att

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

En viss funktion $f(x)$ kan skrivas $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)$ där c_n, $n = 1,2,\ldots,N$, är konstanter.

a) Visa att $c_n = \displaystyle\int_a^b f(x)\Phi_n(x)\,dx$. (2p)

b) Visa att $\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{N} c_n^2$. (2p)