KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 26/5 2004
Svar och lösningsförslag

Lösningsförslagen något förkortade. Vissa standardberäkningar och figurer har utelämnats; vid ett tentamenstillfälle skall alla beräkningar redovisas, och löningarna förses med lämpliga figurer.

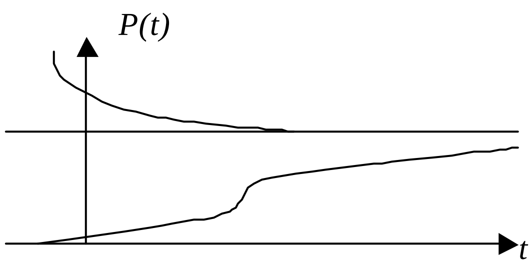
A-uppgifter

1. En djurpopulations storlek som funktion av tiden beskrivs av en funktion $P(t)$ som antas vara bestämd av differentialekvationen $\dfrac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)$, där *a* och *b* är positiva konstanter, och av initialvärdet $P(0) = P_0 > 0$.
   Bestäm $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

   Ekvationen är autonom.
   Först konstaterar vi att ekvationen har stationära lösningar som ges av $P(a - b\ln P) = 0$ som har $P = e^{a/b}$ som enda positiva lösning.

   Vi gör teckenstudium av $\dfrac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)$ för $P > 0$ och skisserar lösningkurvornas utseende.

P	dP/dt	dP/dt
$> e^{a/b}$	< 0	avtagande
$= e^{a/b}$	0	konstant
$< e^{a/b}$	> 0	växande
0	-	-



   Det framgår att $\lim_{t\to+\infty} P(t) = e^{a/b}$ för alla begynnelsevillkor $P(0) = P_0 > 0$.

---

2. Bestäm alla $\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ sådana att $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Vi använder egenvärdesmetoden. Den karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix} -1-l & 2 \\ 2 & -1-l \end{vmatrix} = (l+1)^2 - 4 = l^2 + 2l - 3$ har rötter $l_1 = 1$ och $l_2 = -3$.

Motsvarande egenvektorer beräknas till (se läroboken) $\mathbf{K_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vi får den allmänna lösningen $\mathbf{X}(t) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t}$.

---

3. Finn alla stabila kritiska punkter till systemet $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + x^2 + xy \end{cases}$.

Kritiska punkter ges av $\begin{cases} y = 0 \\ x + x^2 + xy = 0 \end{cases}$ vilket är ekvivalent med att $(x, y) = (0,0)$ eller $(x, y) = (-1,0)$.

Stabliliteten studeras med hjälp av systemets Jacobimatris

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} y & \frac{\partial}{\partial y} y \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + x^2 + xy) & \frac{\partial}{\partial y}(x + x^2 + xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + 2x + y & x \end{pmatrix}.$$

I $(x, y) = (0,0)$ fås

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Man finner att denna matris har egenvärden $l = \pm 1$. Således är $(0,0)$ en sadelpunkt och är därmed instabil.

I $(x, y) = (-1,0)$ fås

$J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Egenvärden ges av $0 = \begin{vmatrix} -l & 1 \\ -1 & -1 - l \end{vmatrix} = l^2 + l + 1$ som ger att $l = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4}}$, dvs. komplexa egenvärden med negativ realdel. Detta implicerar att den kritiska punkten är en stabil spiral.

<u>SVAR:</u> Systemet har endast en stabil kritisk punkt, nämligen $(x, y) = (-1,0)$

4. Bestäm Fourierserien till funktionen f som ges av att

(i) $f(t) = t$ för $1 \leq t < 3$ och

(ii) f är periodisk med periodlängd $T = 2$.

(Du kan välja om du vill använda komplex eller reell trigonometrisk form)

Vi bestämmer serien på reell form. Fourierserien är bestämd av funktionens värden på ett godtyckligt intervall av längd $T = 2$. På intervallet $[-1,1)$ har f formen $f(t) = t + 2$, och vi beräknar Fourierserien över detta intervall.

Inför först funktionen $h(t) = f(t) - 2 = t$ på $[-1,1)$. Detta är en udda funktion på ett symetriskt interval, och dess Fourierserie blir därför en ren sinus-serie

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin npt$ där

$$b_n = \int_{-1}^{1} t \sin npt \, dt = 2\int_{0}^{1} t \sin npt \, dt = [\text{standardräkningar}] = (-1)^{n+1} \frac{2}{np}.$$

Detta är alltså Fourierserien för $h(t) = f(t) - 2 = t$ på $[-1,1)$. Följaktligen har

$f(t) = h(t) + 2$ Fourieserien $2 + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin npt}{n}$.

<u>SVAR:</u> $2 + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin npt}{n}$

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$

(Du kan ha nytta av formeln

$\int t^n \ln t \, dt = \dfrac{t^{n+1} \ln t}{n+1} - \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)^2} + C$ för $n = 0,1,2,\ldots$)

Vi löser först den homogena ekvationen som har karaktäristisk ekvation $r^2 + 2r + 1 = 0$, dvs $r = -1$ är en dubbelrot, så den allmänna homogen lösningen är $y_h(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ där $y_1(t) = e^{-t}$ och $y_2(t) = te^{-t}$.

Vi bestämmer sedan en partikulärlösning till den givna ekvationen med s.k. variation av parameter. Vi söker alltså $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$. Det är känt att detta är en partikulärlösning om

$u_1' = -\dfrac{y_2 f}{W}$ och $u_2' = \dfrac{y_1 f}{W}$, där $f(t) = [\text{diff.ekvs HL}] = e^{-t} \ln t$ och

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t}.$$

Vi får alltså

$$u_1' = -\frac{te^{-t}e^{-t} \ln t}{e^{-2t}} = -t \ln t \overset{\text{enl ledning}}{\Longrightarrow} u_1(t) = -\frac{t^2 \ln t}{2} + \frac{t^2}{4} \quad \text{och}$$

$$u_2' = \frac{e^{-t}e^{-t} \ln t}{e^{-2t}} = \ln t \overset{\text{enl ledning}}{\Longrightarrow} u_2(t) = t \ln t - t.$$

Följaktligen är

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^2 \ln t}{2} + \frac{t^2}{4} \right) e^{-t} + (t \ln t - t)te^{-t} = \left(\frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{3t^2}{4} \right) e^{-t}.$$

Den allmänna lösningen fås nu som

$$y(t) = y_h + y_p = \left(A + Bt + \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{3t^2}{4}\right)e^{-t}$$

---

6. Bestäm alla funktioner $u(x,t)$ på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ \text{och}\ \ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \ t > 0.$$

Den triviala lösningen $u(x,t) = 0$ fås genom inspektion. Om $u(x,t) \neq 0$ är både *X* och *T* skilda från noll och

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad X''T = \frac{1}{2}XT' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X} = \frac{1}{2}\frac{T'}{T} = g = \text{konstant} \qquad (1).$$

Vidare gäller att, om $T(t)$ inte är identiskt lika med noll,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0 \quad (2).$$

För $g = l^2 > 0$ ger (1) att $X'' - l^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = Ae^{lx} + Be^{-lx}$.
Randvillkoren (2) ger då:
$X(0) = A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$, så $X(x) = A(e^{lx} - e^{-lx})$. Det anadra randvillkoret ger då $X(1) = A(e^{l} - e^{-l}) = 0$ Eftersom $e^{l} \neq e^{-l}$ för $l \neq 0$ följer att $A = B = 0$. Dvs. Positiv separationskonstant ger endast den trivila lösningen.

För $g = 0$ ger (1) att $X'' = 0$. Detta ger att *X* är en linjär funktion, och (2) medför återigen att *X* är identiskt lika med noll.

$g = -l^2 < 0$ ger (2) $X'' + l^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A\cos lx + B\sin lx$.
Randvillkoren (2) ger att
$0 = X(0) = A$ så $X(x) = B\sin lx$. Det andra randvillkoret ger sedan att
$0 = X(1) = B\sin l$ som har icke-triviala lösningar omm $l = l_n = np$.
Motsvarande *X*-lösningar ges av $X_n(x) = B_n \sin npx$.

För $g = -l_n^2 = -n^2p^2$ fås ur (1) att $T' = -2n^2p^2T \quad \Rightarrow \quad T = T_n(t) = C_n e^{-2n^2p^2t}$

Slutligen fås alltså möjliga lösningar på angiven form som $u(x,t) = c_n e^{-2n^2p^2t}\sin npx$.

B-uppgifter

7. a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = xy - x$. (2p)

b) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $\dfrac{du}{dx} + xu = xu^2$.

Tips: Substitutionen $u = y^{-1}$ för $u \neq 0$ hjälper dig en bit på vägen. (2p)

a) Ekvationen kan skrivas $\dfrac{dy}{dx} - xy = -x$ och är linjär av första ordningen. Integrerande faktor bestäms till $m = e^{-\int x} = e^{-x^2/2}$. Ledvis multiplikation med m ger

$$e^{-x^2/2}\frac{dy}{dx} - xe^{-x^2/2}y = -xe^{-x^2/2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2/2}y\right] = -xe^{-x^2/2} \Leftrightarrow e^{-x^2/2}y = \int -xe^{-x^2/}$$

Integralen i högerledet beräknas till $e^{-x^2/2} + C$ och det följer att $y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}$.

b) Vi observerar först att $u(x) \equiv 0$ är en lösning.

Eftersom ekvationen kan skrivas som $\dfrac{du}{dx} = f(x,u)$ där $f(x,u) = xu^2 - xu$ är en funktion som överallt är kontinuerlig med kontinuerlig u-derivata kan vi tillämpa satsen om existens och entydighet av lösningar till 1:a ordningens initialvärdesproblem gäller att det genom varje punkt i xu-planet går det precis en lösningskurva. Speciellt kan inga andra lösningar korsa lösningen $u(x) \equiv 0$.

Vi söker nu övriga lösningar, som alltså måste vara skilda från för alla x. Vi gör substitutionen $u = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}$. Den givna ekvationen i b) övergår i

$$-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + x\frac{1}{y} = x\frac{1}{y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} - xy = -x.$$ Enligt a) ger detta

$y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}$ så vi får $u(x) = \dfrac{1}{y(x)} = \dfrac{1}{1 + Ce^{x^2/2}}$.

<u>SVAR:</u> a) $y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}$ b) $u(x) \equiv 0$ och $u(x) = \dfrac{1}{1 + Ce^{x^2/2}}$.

---

8. En partikel rör sig i *xy*-planet. Vid $t=0$ startar den i punkten $(1,1)$, och vid tidpunkter $t>0$ befinner den sig i punkten $(x(t), y(t))$, där $(x(t), y(t))$ uppfyller $\begin{cases} x' = x+5y \\ y' = -x+3y \end{cases}$

Beskriv partikelns bana genom att

a) bestämma funktionerna $x(t)$ och $y(t)$; (2p)

b) göra en enkel men principiellt korrekt skiss av banans utseende. (2p)

a) Vi bestämmer först de $(x(t), y(t))$ som uppfyller de givna differentialekvationerna, som kan skrivas som $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Egenvärden bestämms på sedvanligt sätt till $l = 2 \pm 2i$. En komplex egenvektor till $l = 2+2i$ fås som en icktrivial lösning till det linjära ekvationssystem som har koefficientmatris

$$\begin{pmatrix} 1-(2+2i) & 5 \\ -1 & 3-(2+2i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i) \end{pmatrix}$$

. Nedre raden multiplicerad med $1+2i$ subtraheras från första raden och vi får, efter teckenbyte i andra raden, den ekvivalenta matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1+2i \end{pmatrix}$. Följaktligen är $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en komplex egenvektor. Vi får (se läroboken) en allmän lösning

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\left\{A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right) + B\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 2t\right)\right\}.$$

Villkoret att partikeln vid $t=0$ startar i punkten $(1,1)$ uppfylls om vi väljer $A=1$ och $B=0$. Den sökta banan beskrivs alltså av

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right\}.$$

b) Kan lösas utan att finna den explicita lösningen. Enligt a) har systemet komplexa egenvärden $l = 2 \pm 2i$, med positiv realdel. Det innebär att varje lösningskurva beskriver en spiralrörelse kring och ut från origo. Den sökta banan startar dessutom i punkten $(1,1)$. Vidare ser man att sprialen går medurs i xy-planet; detta inses t.ex. genom att rita ut några av vektorerna i vektorfältet (x', y'). Rita figur!

---

9. a) Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le a\\ 0, & t<0 \text{ eller } t>a\end{cases}$$

där a är en positiv konstant. Ange också formeln för f :s Fourierintegral. (2p)

b) Fouriertransformera funktionen $h(t)$ när man vet att $h(t)=(t-1)g(t-1)$ och att $g(t)$ har Fouriertransformen $\hat{g}(w)=\dfrac{i}{1+w^2}$. (2p)

a) Enligt definition är Fouriertransformen

$$\hat{f}(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt=\int_{0}^{a} e^{-iwt}\,dt=\left[\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right]_0^a=\frac{1-e^{-iwa}}{iw}=\frac{1}{w}\big(\sin wa+i(-1+\cos wa)\big)$$

Fourierintegralen till (inverstransformeringen) ges av $\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}\,dw$.

b) Vi vet att $\hat{g}(w)=\dfrac{i}{1+w^2}$.

Vi beräknar först Fouriertransformen $F(tg(t))$:

$$F(tg(t))=\int_{-\infty}^{\infty} tg(t)e^{-iwt}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{-1}{i}\frac{d}{dw}e^{-iwt}\,dt=i\frac{d}{dw}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iwt}\,dt=i\frac{d}{dw}\hat{g}(w)=$$

$$=i\frac{d}{dw}\frac{i}{1+w^2}=\frac{2w}{\left(1+w^2\right)^2}$$

Vi beräknar Fouriertransformen $\hat{h}(w)=F((t-1)g(t-1))$:

$$F((t-1)g(t-1))=\int_{-\infty}^{\infty}(t-1)g(t-1)e^{-iwt}\,dt=\left\{\begin{matrix}s=t-1 & ds=dt\\ t=s+1 & \end{matrix}\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} sg(s)e^{-iw(s+1)}\,ds$$

$$=e^{-iw}\int_{-\infty}^{\infty} sg(s)e^{-iws}\,ds=e^{-iw}F(tg(t))=\frac{2we^{-iw}}{\left(1+w^2\right)^2}$$

<u>SVAR:</u> a) $\hat{f}(w)=\dfrac{1-e^{-iwa}}{iw}=\dfrac{1}{w}\big(\sin wa+i(-1+\cos wa)\big)$ med inverstransform

$$\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}\,dw$$

b) $\hat{h}(w)=\dfrac{2we^{-iw}}{\left(1+w^2\right)^2}$

10. Funktionerna $\Phi_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,N$ är kontinuerliga på intervallet $[a,b]$ och sådana att

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

En viss funktion $f(x)$ kan skrivas $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)$ där c_n, $n = 1,2,\ldots,N$, är konstanter.

a) Visa att $c_n = \int_a^b f(x)\Phi_n(x)\,dx$. (2p)

b) Visa att $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{N} c_n^2$. (2p)

a) Välj ett fixt men godtyckligt heltal m, $1 \leq m \leq N$. Multiplicera bägge led i likheten $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)$ med $\Phi_m(x)$:

$$f(x)\Phi_m(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)\Phi_m(x).$$

Integrera sedan bägge led m.a.p x över intervallet $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\Phi_m(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx$$

Vi byter ordning på integration och summation i högerledet, som då kan skrivas

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_a^b c_n\, \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} c_n \int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx.$$

Det är givet att integralerna blir noll såvida inte $n = m$, i vilket fall den $= 1$.

Alltså får vi att $\int_a^b f(x)\Phi_m(x)\,dx = c_m$. Eftersom m var godtyckligt är påståendet bevisat.

b)

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)\right]^2 dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_n c_m \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_n c_m \int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx$$

Vi använder åter det givna villkoret på integralerna och finner att

$$\int_a^b [f(x)]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{N} c_n^2$$, vilket skulle bevisas.