KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 20/8 2004 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 4 B-uppgifter om 4 poäng vardera. OBS: Det finns två stycken uppgift nummer 10. Den ena är markerad med **D** och behandlar stoff från kursomgången VT04 för D2, den andra är markerad **CL** och behandlar stoff från kursomgång HT03 för CL. Du kan själv välja vilken av de två du vill lösa, oberoende av vilken kursomgång du följde. Du får dock bara poäng för en av dessa två uppgifter; löser du bägge räknas den med högst poäng.
För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.
För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från kontrollskrivningar och miniprojekt under kursens gång, samt minst 4 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng. För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 8 respektive 13 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från miniprojekt under kursens gång.
Inga hjälpmedel tillåtna. *Lycka till!*

A-uppgifter

1. Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen $x^2\dfrac{dy}{dx}+y=1$ på intervallet $x>0$.
2. Ange en differentialekvation som har $y(x)=(Ax+B)e^{-2x}+Ce^{3x}$ som sin allmänna lösning.
3. Lös det homogena systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\mathbf{X}$.
4. Ett föremål släpps från taket på en skyskrapa. Föremålet påverkas av två krafter: gravitationen och luftmotståndet. Luftmotståndet antas vara proportionellt mot hastigheten. Newtons andra lag säger att en kraft F ger ett föremål med massa m en acceleration a, där $F = ma$.
   a) Formulera det begynnelsevärdesproblem som bestämmer föremålets hastighet som funktion av tiden (så länge föremålet ännu ej har nått marken). Alla införda beteckningar ska förklaras. (2p)
   b) Beskriv hur hastigheten beror av tiden, antingen genom att ge en explicit lösning eller genom att göra en riktingsfältsanalys. (1p)
5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet $\begin{cases}x'=x+y^2\\ y'=x^2-1\end{cases}$.
6. Låt $f(x)=x$, definierad på intervallet $(0,1)$.
   a) Uttryck f som en Fourier-cosinusserie på intervallet $(0,1)$. (2p)
   b) Fourier-cosinusserien i a) är också Fourier-serie för en viss funktion g definierad på hela den reella axeln. Skissera grafen till g. (1p)

B-uppgifter

7. Betrakta begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2\sqrt{y} \\ y(0) = a \end{cases}$.

   a) Lös begynnelsevärdesproblemet för $a > 0$. (2p)

   b)Visa att problemet har en unik lösning på intervallet $t > -\sqrt{a}$. (2p)

8. a) Bestäm samtliga lösningar till systemet $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -y \end{cases}$. (2p)

   b) Rita ett fasporträtt av systemet, utgående från lösningarna du funnit i del a). Fasporträttet skall ge en tydlig bild av alla de olika typer av lösningar som förekommer. (2p)

9. a) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1; \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad 0 < y < 1; \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1; \\ u(x,1) = 1, \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

(3p)

   b) Ge exempel på ett fysikaliskt problem som kan modelleras med ekvationerna i deluppgift a). Förklara vad variablerna och ekvationerna representerar. Du behöver inte göra den fysikaliska härledningen. (1p)

10 (CL). Denna fråga behandlar tidsdiskreta system (iterationer) $x_{n+1} = f(x_n)$, i en reell variabel.

a) Definiera vad som menas med en fixpunkt till *f*. (1p)
b) Definiera vad som menas med att en fixpunkt är stabil. (1p)
c) Bevisa följande sats:
   Antag att f är en två gånger deriverbar funktion och att q är en fixpunkt till f sådan att $|f'(q)| < 1$. Då är q en stabil fixpunkt till f. (2p)

10 (D). Denna fråga behandlar Fouriertransformen av reella funktioner definierade på reella axeln. (Ett par olika definitioner av Fouriertransformen förekommer i litteraturen; du kan naturligtvis välja den du är bekant med.)

a) Definiera Fouriertransformen och dess invers. (2p)
b) Bevisa följande sats:
   Antag att funktionen $f(x)$ har Fouriertransform $\hat{f}(w)$. Funktionen $g(x) = f(ax)$, där $a \neq 0$, har då Fouriertransform $\hat{g}(w) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{w}{a}\right)$. (2p)