TENTAMEN 5B1212 12/1-05

SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $$t\frac{dP}{dt} + 3P = 4t \underset{t\neq 0}{\overset{\text{FÖR}}{\Longleftrightarrow}} \frac{dP}{dt} + \frac{3}{t}P = 4$$

INTEGRERANDE FAKTOR: $\mu = e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\ln|t|} = |t|^3$.

VI KAN ANVÄNDA $\mu = t^3$ ÄVEN FÖR $t<0$. VI FÅR

$$t^3\frac{dP}{dt} + 3t^2P = 4t^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left[t^3P\right] = 4t^3 \Leftrightarrow t^3P = t^4 + C$$

$$\Leftrightarrow P(t) = t + Ct^{-3}.$$

Villkoret $P(-1)=0$ ger $(-1) - C = 0 \Leftrightarrow C = -1$

SVAR: $P(t) = t - t^{-3}$

EXISTENSINTERVALL: $-\infty < t < 0$.

---

2. $$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

MOTSV. HOMOGENA EKV. HAR KAR. EKV. $r^2+2r+1=0$

$\Leftrightarrow (r+1)^2 = 0$ SÅ $r=-1$ DUBBELROT.

HOMOGEN LÖSNING: $y_h(x) = (Ax+B)e^{-x}$.

ANSÄTT $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, DÄR $y_1 = xe^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$.

DÅ ÄR $$\begin{cases} u_1' = -\dfrac{fy_2}{W} \\ u_2' = +\dfrac{fy_1}{W} \end{cases}, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$f = H.L. = e^{-x}$

2 forts.

$$W = \begin{vmatrix} xe^{-x} & e^{-x} \\ e^{-x} - xe^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-2x} - e^{-2x} + xe^{-2x}$$

$$= -e^{-2x}$$

$$u_1' = -\frac{e^{-x}e^{-x}}{-e^{-2x}} = 1 \Rightarrow u_1 = x$$

$$u_2' = \frac{e^{-x}(xe^{-x})}{-e^{-2x}} = -x \Rightarrow u_2 = -\frac{x^2}{2}$$

$$y_p = x(xe^{-x}) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = \frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$$\boxed{\underline{\text{SVAR:}}\quad y_g(x) = y_h + y_p = \left(\frac{x^2}{2} + Ax + B\right)e^{-x}}$$

3.

Stationära lösningar ges av

$$\begin{cases} 1 + xy = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ $y = -x$. Insatt i (1) fås $1 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = \pm 1$. Vi får två stationära lösningar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ $(1,-1)$ sadelpkt.

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$\Rightarrow$ $(-1,1)$ instabil spiral.

SVAR:
$(1,-1)$ sadelpunkt (instabil)
$(-1,1)$ instabil spiral

(4.) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A har egenvärden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

$\lambda_1 = -1$ svarar mot $\bar{K}_1 \neq 0$ s.a.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \bar{K}_1 = 0, \quad \text{t.ex. } \bar{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

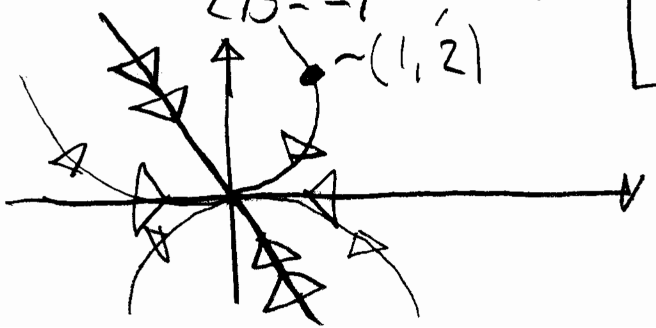
$\lambda_2 = -3$ svarar mot $\bar{K}_2 \neq 0$ s.a.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{K}_2 = \bar{0}, \quad \text{t.ex } \bar{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

SVAR a)
Allmän lösning $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}}$$

b) Villkoret $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$ dvs $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t}}$$



5.

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t \, e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \left\{ \cos \Omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\Omega t} e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega-\Omega)t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega+\Omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega-\Omega) + \hat{f}(\omega+\Omega) \right)$$

$$\boxed{\text{SVAR: } \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\omega-\Omega) + \hat{f}(\omega+\Omega)\right)}$$

(6.) Bilda

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos 2nt+d_n\sin 2nt\right)\sin nx$$

Enligt superpositionsprincipen löser även u (1) och (2) (om serien konvergerar "tillräckligt bra").

(3) ger $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos 0+d_n\sin 0\right)\sin nx=\sin 2x$, $0<x<\pi$

$$\Longleftrightarrow \sum_{1}^{\infty} c_n\sin nx=\sin 2x$$

$$\Longleftrightarrow c_n=0 \quad n\neq 2\,,\quad c_2=1$$

Alltså $\displaystyle u(x,t)=\cos 4t\sin 2x+\sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin 2nt\,\sin nx$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}=-4\sin 4t\sin 2x+\sum_{n=1}^{\infty}2n d_n\cos 2nt\,\sin nx$$

(4) ger $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2nd_n\sin nx=1\,,\quad 0<x<\pi$

dvs. $\displaystyle b_n=2nd_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right)=\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right)$$

dvs $\displaystyle d_n=\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$

<u>SVAR</u>: $\displaystyle u(x,t)=\cos 4t\sin 2x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\sin 2nt\sin nx$

$$=\cos 4t\sin 2x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)^2\pi}\sin(4m-2)t\,\sin(2m-1)x$$

7.

a) $\dfrac{dP}{dt} = P(a - b\ln P)$, $a, b > 0$

Stationära lösningar: (OBS: H.L. endast def för $P > 0$)

$$P(a - b\ln P) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $P = 0$ (förkastas)

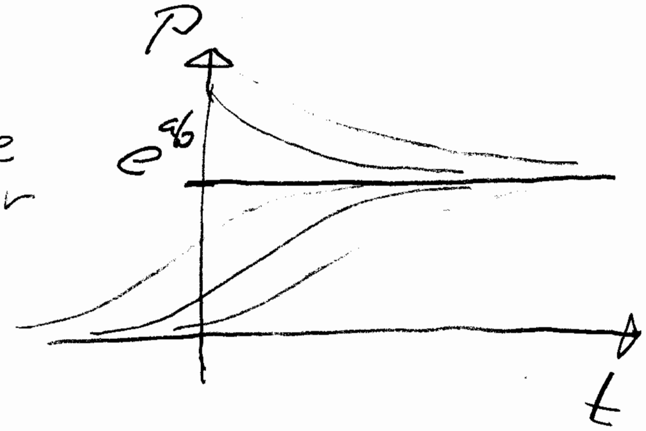
eller $\ln P = \dfrac{a}{b}$ $\Longleftrightarrow$ $P(t) \equiv e^{a/b}$

Teckenstudie av H.L.:

P	dP/dt	$P(t)$
$> e^{a/b}$	$-$	avtagande
$e^{a/b}$	0	stationär
$0 < P < e^{a/b}$	$+$	växande
0	ej def	

OBS: $\lim_{P \to 0} P(a - b\ln P) = 0$

Utvidgat fasporträtt



Varje initialvärde $P(0) = P_0 > 0$ svarar mot en lösning $P(t) = P(t, P_0)$.

$\lim_{t \to +\infty} P(t) = e^{a/b}$ för alla $P_0 > 0$.

- För $0 < P_0 < e^{a/b}$ växer $P(t)$ montont mot $e^{a/b}$
- $P_0 = e^{a/b} \Rightarrow P(t) = e^{a/b}$ alla t
- $P_0 > e^{a/b} \Rightarrow P(t)$ avtar monotont mot $e^{a/b}$.

Populationsstorleken stabiliseras sig mot jämviktspopulationen $e^{a/b}$.

7 b) Ekvationen $\frac{dP}{dt} = P(3 - 2\ln P)$ är separabel.

Enligt a) har den en jämviktslösning $P \equiv e^{3/2}$, och begynnelsevillkoret $P(0)=10$ är $> e^{3/2}$ så den sökta lösningen avtar monotont mot $e^{3/2}$, speciellt är $P(t) > e^{3/2}$ för alla t.

Separation ger

$$\int \frac{dP}{P(3-2\ln P)} = \int dt$$

$$H.L. = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln P \\ du = \frac{1}{P}\, dP \end{array} \right\} = \int \frac{du}{3-2u} = -\frac{1}{2} \ln|3-2u|$$

$$= \left\{ 3-2u = 3-2\ln P < 3-2\ln e^{3/2} < 0 \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(2\ln P - 3).$$

Alltså är

$$-\frac{1}{2} \ln(2\ln P - 3) = t + C_1$$

$P(0)=10$ ger

$$-\frac{1}{2} \ln(2\ln 10 - 3) = C_1$$

Vi får

$$-\frac{1}{2} \ln(2\ln P - 3) = t - \frac{1}{2}\ln(2\ln 10 - 3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2\ln P - 3) = -2t + \ln(2\ln 10 - 3)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln P - 3 = (2\ln 10 - 3)e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow \ln P = \frac{3}{2} + (\ln 10 - 3/2)e^{-2t}$$

$$\boxed{\text{SVAR: } P(t) = \exp\{3/2 + (\ln 10 - 3/2)e^{-2t}\}}$$

8 a) A:s egenvärden bestäms:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1 = 1$ (enkelt egenvärde) svarar mot egenvektor $\overline{K}_1$ s.a.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overline{K}_1 = \overline{0}, \quad \text{t.ex } \overline{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ger en lösning $\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ (dubbelt egenvärde) svarar mot egenvektor $\overline{K}_2$ s.a.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overline{K}_2 = \overline{0}, \quad \text{t.ex. } \overline{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ger en lösning $\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$

En tredje linjärt oberoende lösning fås som

$\overline{X}_3(t) = t\overline{K}_2 e^{2t} + \overline{P} e^{2t}$ där $\overline{P}$ uppfyller

$$(A-2I)\overline{P} = \overline{K}_2, \quad \text{dvs} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som uppfylls av t.ex $\overline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

dvs $\overline{X}_3(t) = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ (t+1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$

SVAR 8 a): $\overline{X}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ (t+1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$

8 b) Stationära lösningar ges av

$$A\bar{X} + \bar{F} = \bar{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 0 \\ 3y + z + 4 = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Så $\boxed{\underline{\underline{\text{SVAR:}}}\ \bar{X}_p = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ är (enda) stationära lösning}}$

c) Allmän lösning ges av

$$\bar{X}_g(t) = \bar{X}_h(t) + \bar{X}_p(t)$$

allmän homogen lösning   någon partikulär lösning

med $\bar{X}_h$ & $\bar{X}_p$ som ovan fås

$$\underline{\text{SVAR:}}\quad \bar{X}_g(t) = c_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ (t+1)e^{2t} \\ -t\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

(9.) Låt $f(t) = \begin{cases} \pi & |t|<1 \\ \pi/2 & |t|=1 \\ 0 & |t|>0 \end{cases}$ och låt $h(t) = \frac{1}{2\pi} f(t)$.

Eftersom f och f' är styckvis kontinuerliga, f absolutintegrerbar och $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = f(t)$ $\forall t$ kommer f att ha en Fouriertransform $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ sådan att $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\}(t) = f(t)$ för alla t.

Detsamma gäller h: $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{h}\}(t) = h(t)$, alla t.

Påståendet i uppgiften $\cancel{\Leftrightarrow}$ $2\pi\mathcal{F}^{-1}\{g(x)\}(t) = f(t)$

$\overset{\text{(ovan)}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi} f(t)\}(x) = g(x)$. Vi visar detta:

$x \neq 0$: $\mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi} f(t)\}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx}\,dt =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-ixt}}{-ix}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2ix}\left[e^{ix} - e^{-ix}\right] = \frac{1}{2ix}\left[\cos x + i\sin x - \cos x + i \sin x\right]$$

$$= \frac{\sin x}{x}$$

$x = 0$: $\mathcal{F}\{\frac{1}{2\pi} f(t)\}(0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{e^{-i0t}}_{=1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

V.S.B.

(10.) Systemets kritiska punkter (stationära lösningar) ges av

$$\begin{cases} xy^2 = 0 \\ 3x^3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } y=0$$

- dvs. varje punkt på koordinataxlarna är kritisk. Inga andra stationära lösningar

- Eftersom $P(x,y) = xy^2$ och $Q(x,y) = 3x^3y^2$

är kontinuerliga med kontinuerliga partiella derivator i hela planet, går genom varje punkt exakt en lösningskurva.

- För $x \neq 0$, $y \neq 0$ uppfyller lösningskurvorna, sedda som grafer $y = y(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3x^3y^2}{xy^2} = 3x^2$$

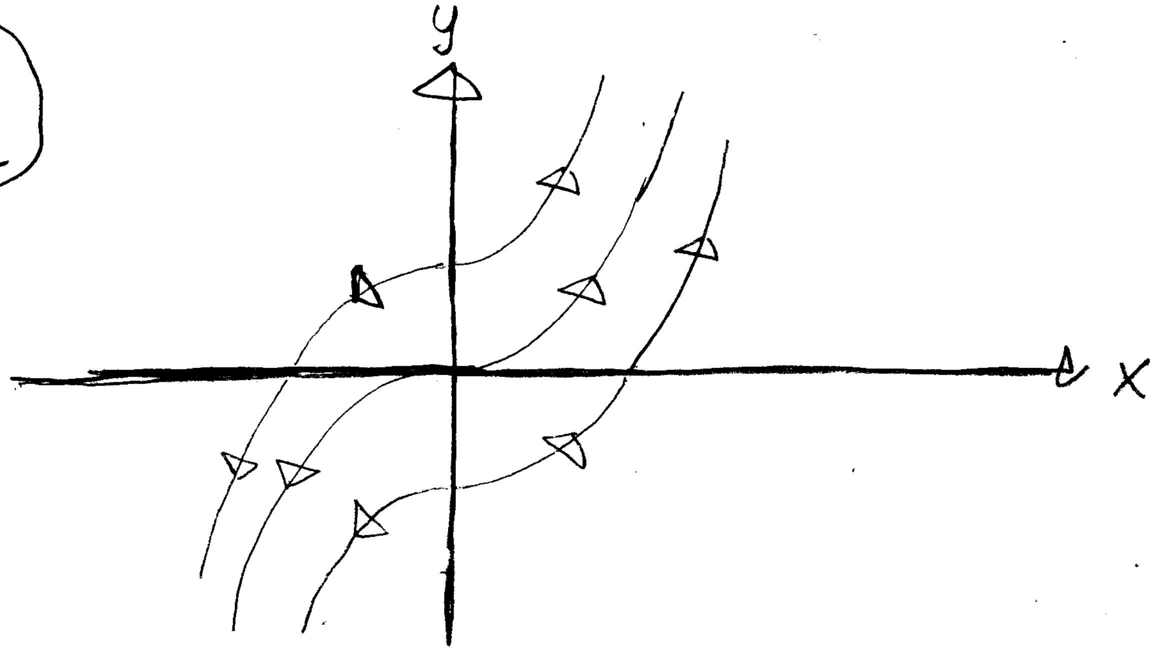
$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

- Eftersom $P(x,y) = xy^2 \begin{cases} >0 & x>0 \\ <0 & x<0 \end{cases}$

och $Q(x,y) = 3x^3y^2 \begin{cases} >0 & x>0 \\ <0 & x<0 \end{cases}$

gäller att $x(t)$ och $y(t)$ växer med t för $x>0$ och avtar med t för $x<0$.

10 forts.



- Koordinataxlarna består av stationära lösningar
- Genom punkter (x_0, y_0), $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ går lösningskurvor som följer grafen till $y = x^3 + C$ för något C.

Dessa banor går asymtotiskt mot de stationära lösningarna på axlarna när $t \to \pm\infty$ enligt figuren.

I 1:a & 3:e kvadranten gäller att
$|(x(t), y(t))| \to \infty$, $t \to +\infty$