

Matematik KTH
Hans Thunberg

**5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
VT04**

Miniprojekt 1

Elektrisk svängning

Instruktioner

Följande uppgifter skall lösas individuellt. Under arbetets gång får du förstås gärna diskutera med dina kamrater och söka hjälp i litteraturen, men alla källor skall redovisas ordentligt, såväl litteratur och web-sidor som personlig kommunikation. *Att kopiera litteratur eller en kamrats arbete är naturligtvis inte tillåtet.*

Vid bedömningen kommer stor vikt fästas vid att presentationen är klar och tydlig. Lösningarna skall vara utförligt och tydligt genomförda samt väl läsbara för en person med förkunskaper som motsvarar dina egna. Kommentera, beskriv och tolka vad du gör.

Använd gärna matematisk programvara eller räknare där du finner det lämpligt, men du skall då alltid redovisa vilka hjälpmedel du har använt, och kommentera eventuella felkällor som detta kan ge upphov till. På kurshemsidan finns en del Maple-tips.

Skriftliga lösningar skall lämnas in till din övningslärare senast fredag 2/4. I veckan efter påskperioden, på tider som bestäms av din övningslärare, skall du också muntligen redogöra för dina lösningar i en mindre grupp.

Maximalt ger detta projekt 2 poäng till den avslutande tentans A-del och 2 poäng att räknas för betyg 4 eller 5 på tentans B-del. Var och en av de fyra uppgifterna ger en $\frac{1}{2}$ A-poäng. B-poäng sätts utifrån en helhetsbedömning med avseende framställning och visad begreppsförståelse.

Mer om examinationsbestämmelserna finns på kurshemsidan

Uppgifter

RC-kretsar

Vi börjar med att studera ekvationen för en seriell krets bestående av en spänningskälla med varierande spänning $E(t)$, ett motstånd med resistans R och en kondensator med kapacitet C . Laddningen i kondensatorn betecknas $q(t)$, och strömmen genom kretsen betecknas $i(t)$. Det gäller att $i(t) = q'(t)$. Laddningen $q(t)$ bestäms av initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) \\ q(t_0) = q_0 \end{cases} \quad (1)$$

I uppgift 1 och 2 skall du undersöka hur lösningen $q(t)$ till (1) beror av initialvärdet q_0 .

1. Välj $R=1$, $C=0.1$ och högerledet $E(t)=1$. Plotta med *Maple* de lösningskurvor som ges av initialvärden $q(0)=0.2$, $q(0)=0$, $q(0)=-0.1$ och $q(0)=-0.2$ över tidsintervallet $0 \leq t \leq 1$.

Hur skiljer sig dessa lösningskurvor åt? Vilka likheter har de?

Upprepa experimentet med ett par andra högerled. ($E(t) = t$ respektive $E(t) = \sin(10t)$), med samma initialvärden, tidsintervall och värden på R och C som ovan är exempel som enkelt ger goda numeriska resultat i *Maple*)

Beskriv resultatet och formulera en hypotes om hur lösningen $q(t)$ till (1) beror av initialvärdet q_0 .

2. Bevisa att din hypotes om initialvärdets påverkan på lösningen.

LRC-kretsar

Vi går nu vidare och studerar ekvationerna för kretsar som ovan som dessutom innehåller en spole med induktans L . Laddningen $q(t)$ bestäms av

$$\begin{cases} L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) & (2) \\ q(0) = q_0, \quad i(0) = i_0 & (3) \end{cases}$$

3. a) Studera först det homogena problemet $E(t) = 0$. Genomför härledningen av den klassificering i fallen i *överdämpad*, *kritiskt dämpad*, *underdämpad* och *odämpad svängning* som görs i Zill-Cullen 5.1 (sid. 227 i 5:e upplagan), och skriv upp den allmänna lösningen till (2) för dessa fyra fall, och gör en enkel skiss över grafen till lösningen $q(t)$ för vart och ett av fallen. Beskriv tidsutvecklingen.

b) Välj lämpliga värden på konstanterna L , R och C (och på begynnelsevärdena q_0 och i_0) och illustrera vart och ett av de fyra fallen i föregående uppgift genom att plotta lösningarna med hjälp av *Maple* eller annan lämplig programvara.
4. Förklara vad som menas med *transienta* respektive *steady-state*-lösningar till (2). Förklara också hur lösningen till (2) och (3) beror på q_0 och i_0 . Illustrera med lämplig plot.