Matematik KTH
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
VT04

Miniprojekt 2

Fouriertransformer och Fourierintegraler

Instruktioner

Följande uppgifter skall lösas individuellt. Under arbetets gång får du förstås gärna diskutera med dina kamrater och söka hjälp i litteraturen, men alla källor skall redovisas ordentligt, såväl litteratur och web-sidor som personlig kommunikation. *Att kopiera litteratur eller en kamrats arbete är naturligtvis inte tillåtet.*

Vid bedömningen kommer stor vikt fästas vid att presentationen är klar och tydlig. Lösningarna skall vara utförligt och tydligt genomförda samt väl läsbara för en person med förkunskaper som motsvarar dina egna. Kommentera, beskriv och tolka vad du gör.

Använd gärna matematisk programvara eller räknare där du finner det lämpligt, men du skall då alltid redovisa vilka hjälpmedel du har använt, och kommentera eventuella felkällor som detta kan ge upphov till.

Inlärningsmässigt är det en stor fördel om börjar arbeta med projektet redan under vecka 19 (måndagen 3/5 och framåt). Projektet avser att stödja undervisningen om Fourietransformer och Fourierintegraler.

Skriftliga lösningar skall lämnas in till din övningslärare tisdagen 18/5 kl. 13.15 vid sista övningstillfället; det är *obligatoriskt* att delta vid detta tillfälle för den som vill kunna tillgodoräkna sig dessa bonuspoäng. Du skall då vara beredd att muntligen redogöra för dina lösningar; din övningslärare kommer att slumpa fram ett antal personer bland de som deltagit för muntlig presentation.

Maximalt ger detta projekt 2 poäng till den avslutande tentans A-del (Uppgift 1) och 2 poäng att räknas för betyg 4 eller 5 på tentans B-del (Uppgift 2).

Mer om examinationsbestämmelserna finns på kurshemsidan

Uppgift 1 (ger maximalt 2p A-bonus)

Låt $f_c(t) = \begin{cases} t & -c < t < c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$, där c är en positiv reell parameter.

a) Bestäm $\hat{f}_c(w)$ och frekvensspektrat $A_c(w) = \left|\hat{f}_c(w)\right|$.

b) Rita med lämplig programvara graferna till $f_c(t)$ och $A_c(w)$, $w \geq 0$ för fyra olika c-värden. Detta skall tydligt illustrera hur en omskalning på funktionssidan (genom en ändring av parametern c) påverkar frekvensspektrat, och vice versa.

c)-d) Upprepa a) och b) för funktionsfamiljen

$$h_c(t) = \begin{cases} |t| & -c < t < c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Uppgift 2 (ger maximalt 2 poäng B-bonus)

Låt $g(t)$ vara den funktion som har Fouriertransform $\hat{g}(w) = \begin{cases} p, & -1 \le w \le 1, \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$

Förberedelse:

- Skriv $g(t)$ som en Fourierintegral, och observera att den kan skrivas som

$$g(t) = \int_0^1 \cos wt \, dw \ .$$

- Utryck $g(t)$ som en elementär funktion, och observera att g är en icke-periodisk funktion, definierad på hela reella axeln

Vi vill gärna tänka på Fourierintegraler som en generalisering av Fourieserier. Det är dock kanske inte intuitivt uppenbart hur den icke-periodiska funktionen g byggs upp som integral (tänk ”generaliserad summa”) av periodiska funktioner. Följande övningar är ett försök att visualisera hur detta går till.

a) Konstruera en följd av Riemannsummor $\Psi_n(t)$ sådana att

(i) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(t) = \int_0^1 \cos wt \, dw$;

(ii) varje funktion Ψ_n är en ändlig summa av cosinusfunktioner.

Funktionerna $\Psi_n(t)$ utgör nu en följd av successivt bättre approximationer till g:s Fourierintegral. Illustrera nu detta:

b) Plotta graferna till ett antal av funktionerna $\Psi_n(t)$ och jämför med grafen till $g(t)$. Diskutera och förklara vad du ser.