KTH Matematik
Hans Thunberg

5B1212 Differentialekvationer och Transformer III
Tentamen 14/1 2006 14.00-19.00

Skrivningen består av 6 A-uppgifter om 3 poäng vardera och 6 B-uppgifter om 4 poäng vardera. För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och väl presenterad lösning. Endast svar ger som regel inga poäng.

För godkänt med betyg 3 krävs minst 12 p på A-uppgifterna, inklusive A-bonus från den löpande examinationen, samt minst 6 poäng på B-uppgifterna utan bonuspoäng.
För betyg 4 och 5 krävs dessutom minst 14 respektive 20 poäng på B-uppgifterna inklusive B-bonus från den löpande examinationen. Dessa gränser är preliminära och kan komma justeras något.

Endast bonuspoäng från kursomgången VT 2005 för D2 får tillgodoräknas vid denna tentamen.

Inga hjälpmedel tillåtna. *Lycka till!*

A-uppgifter

1. Bestäm alla stationära lösningar till $\frac{dy}{dt} = y\cos y$ i området $-p < y < p$. Klassificera också dessa lösningar med avseende på stabilitet.

2. Bestäm samtliga lösningar till $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 2e^x$.

3. Bestäm samtliga lösningar $\mathbf{X}(t) = (x(t), y(t))$ till systemet
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

4. Låt $f(t)$ vara signalen $f(t) = q(t+1) - q(t-1) + d(t-2)$, $-\infty < t < \infty$, där $q(t)$ är Heavieside-funktionen (”the unit step function”) och $d(t)$ är en Dirac-puls.
a) Beskriv signalen med lämplig figur eller i ord. (1p)
b) Beräkna Fouriertransformen av f . (2p)

5. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^y(x-y) \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y \end{cases}$$

6. Bestäm en funktion $u(x,t)$ som uppfyller $u_t + 2u_x = 0$ för alla x och t, och som dessutom uppfyller de två extra villkoren $u_x = 3u$ för alla x och t och $u(0,0) = 1$.

B-uppgifter

7. a) Lös differentialekvationen $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{1}{x}u = -1$, $x > 0$. (2p)

   b) Lös differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = y^2$, $x > 0$ genom att genomföra substitutionen

   $y = \dfrac{1}{u}$ och sedan utnyttja resultatet i a)-uppgiften. (2p)

8. Är det sant att *den allmänna lösningen* till

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ -1 - te^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

   utgörs av

$$\mathbf{X}(t) = A\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + B\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   där A, B och C är godtyckliga konstanter?
   Motivera ditt svar ordentligt! (I kursen formulerade satser får användas utan bevis)

9. Bestäm Fourierserien $S(x)$ till $f(x) = |x|$ på intervallet $(-p, p)$. Skissera också grafen $y = S(x)$ på intervallet $(-3p, 3p)$.

10. För varje $l > 0$ generar iteration av funktionen $f_l(x) = \dfrac{lx}{1+x}$ ett tidsdiskret dynamiskt system på positiva halvaxeln $x \geq 0$. Undersök förekomsten av fixpunkter och 2-cykler (periodiska banor av längd 2) för $l > 0$. Avgör också stabiliteten hos de fixpunkter och 2-cykler du finner.

11. Finn en linjär homogen differentialekvation av andra ordningen sådan att funktionerna $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x^2$ är lösningar.

12. Funktionerna $\Phi_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,N$ är kontinuerliga på intervallet $[a,b]$ och sådana att

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

   En viss funktion $f(x)$ kan skrivas $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x)$ där c_n, $n = 1,2,\ldots,N$, är konstanter.

   Visa att $\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{N} c_n^2$.