ITERATIONER

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR OM TIDSDISKRET DYNAMIK

5B1212, CL2, 31/10 2003

HANS THUNBERG

Innehåll

Date: 30 oktober 2003.

1. Introduktion.

1.1. Modeller i kontinuerlig respektive diskret tid.

1.1.1. *Kontinuerlig tid.* Vi har tidigare studerat hur autonoma första ordningens ordinära differentialekvationer kan användas för att modellera vissa fenomen som varierar på ett lagbundet sätt över tiden. Till exempel kan $x = x(t)$ tänkas beskriva storleken av en viss djurpopulation, där t är en *kontinuerlig* tidsvariabel, dvs. t varierar över (ett delinterval av) de reella talen, och för varje reellt tal t i definitionsmängden antar $x(t)$ ett specifikt värde. Tidsutvecklingen av $x(t)$ styrs av ett begynnelsvärdesproblem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) & \text{(Differentialekvation)} \\ x(0) = \alpha & \text{(Begynnelsevärde).} \end{cases} \tag{1}$$

Vid tidpunkten $t = 0$ startar variabeln x i värdet α. Den fortsatta utvecklingen styrs av differentialekvationen. Intuitivt kan vi tänka på det hela som en rekursiv process som stegar fram i infinitesimalt små tidssteg dt. För $t \geq 0$ bestäms värdet $x(t+dt)$ av att vi startar i $x(t)$ och rör oss vidare i tangentens riktning, som enligt (1) ges av $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$,

$$x(t + dt) = x(t) + f(x)dt.$$

Kommentar. Att problemet är autonomt betyder som bekant att högerledet i differentialekvationen inte explicit beror på t. Det innebär att om vi startar om systemet i samma starläge vid en senare tidpunkt, så kommer det att genomlöpa samma utveckling, det är bara begynnelsevärdet, och inte beygnnelsetiden som bestämmer utvecklingen. Man säger också att (1) utgör ett *en-dimensionellt dynamiskt system i kontinuerlig tid.*

1.1.2. *Diskret tid.* I många sammanhang är det naturligare att tänka sig en varibel x som beror av en *diskret* tidsvaribel. Det innebär att den beroende variabeln x antar värden endast i (icke-negativa) heltalspunkter, dvs. $x = x(n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Man indikerar ofta tidpunkten n med ett index istället, $x = x(n) = x_n$, och vi skall följa denna praxis här nedan.

Inom biologin används tidsdiskreta modeller t.ex. ibland när man vill modellera populationsutvecklingen hos ettåriga insekter. Då betecknar x_n antalet individer som lever år n, dvs. antalet individer i n:te generationen, vid en viss tidpunkt i deras livscykel. Om den omgivande miljön är densamma år från år är det rimligt att föreställa sig att antalet individer nästa år är entydigt bestämt av antalet individer innevarande år, det är ju den enda varierande storheten, dvs. $x_{n+1} = f(x_n)$. Analogt med det tidskontinuerliga fallet är nu utvecklingen bestämd av ett begynnelsevärde och en rekursionsformel

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) & \text{(Rekursionsekvation)} \\ x_0 = a & \text{(Begynnelsevärde).} \end{cases} \tag{2}$$

Rekursionsformeln ger att

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = f(a) \\
x_2 &= f(x_1) = f\left(f\left(a\right)\right) = f \circ f(a) \overset{\text{skrivs som}}{=} f^2(a) \\
x_3 &= f(x_2) = f\left(f\left(f\left(a\right)\right)\right) = f \circ f \circ f(a) \overset{\text{skrivs som}}{=} f^3(a) \\
\ldots \\
x_n &= f(x_{n-1}) = f^n(a)
\end{aligned}
$$

där $f^n(x)$ definieras som

$$f^n(x) \overset{\text{definition}}{=} \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ st.}}(x))).$$

Observera att f^n alltså betecknar f sammansatt med sig självt n gånger (inte n:te potensen av f). Att sammansätta en funktion med sig själv på detta sätt kallas att *iterera* funktionen; f^n kallas det n:te iteratet av f. Man säger också att (2) definierar ett *endimensionellt dynamiskt system i diskret tid.*

Definition 1. Följden av punkter $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, där $x_n = f\left(x_{n-1}\right)$ kallas *banan* hörande till x_0 under (iteration av) f.

Kommentar. Observera likheterna och skillnaderna mellan (1) och (2). Analogin blir tydligare om det tidsdiskreta systemet är givet av en *differensekvation*

$$
\begin{cases}
x_{n+1} - x_n = d(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots & \text{(Differensekvation)} \\
x_0 = a & \text{(Begynnelsevärde),}
\end{cases}
$$

där $d(x_n)$ beskriver förändringen från generation n till generation $n+1$. Varje differensekvation kan naturligtvis skrivas på den generellare formen (2) genom att sätta $f(x_n) = x_n + d(x_n)$.

Kommentar. När vi tänker på populationsmodeller med en variabel x_n som beskriver populationens storlek, behöver inte x_n nödvändigtvis vara antalet individer vid tid n. Man kan också tänka sig en annan skala, så att x_n är antal individer räknat i t.ex. tusental, eller att x_n mäter populationens samlade vikt, den s.k.biomassan.

Övning 1.1. Den enklaste populationsmodellen i diskret tid är den linjära, $x_n = \lambda x_{n-1}$, $n \geq 1$, där λ är en positiv parameter och $x_n \geq 0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Vad har parametern λ för biologisk tolkning?
(b) Uttryck x_n som en funktion av x_0, λ och n.
(c) Sammanfatta sedan i ord hur denna populationsmodell beter sig i det långa loppet (dvs. när $n \to \infty$), och hur detta beteende beror på x_0 och λ.
(d) Vilka problem kan du se med denna modell som en beskrivning av verkliga populationers storlek?

Att som i detta fall kunna hitta en explicit och hanterbar formel för x_n är för det mesta omöjligt för andra modeller.

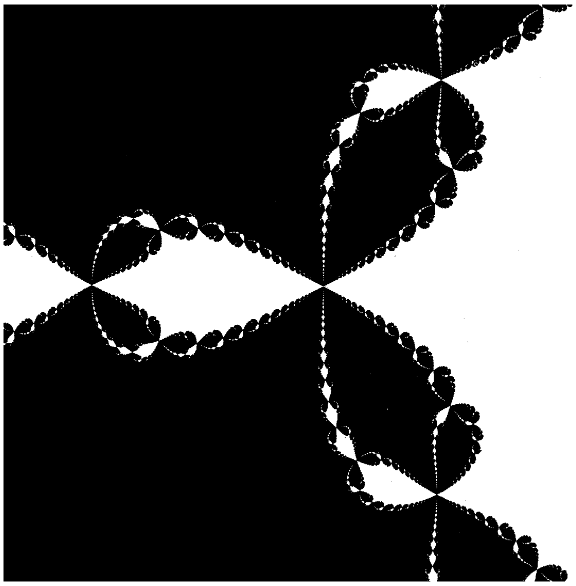
Övning 1.2. För att avhjälpa bristerna med den linjära modellen, vill man introducera en dämpande faktor för stora populationer. Om vi tänker oss variabeln x_n skalad så att $0 \leq x_n \leq 1$ kan vi t.ex. pröva med

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-1})$$

(a) Observera att om x_{n-1} är litet (dvs. nära noll) är $x_n \approx \lambda x_{n-1}$.
(b) Om x_{n-1} är stort , dvs. nära 1, så kommer x_n att vara litet.
(c) På vilket sätt är denna modell mer realistisk än den linjära? Vilka brister har den?
(d) Skriv x_1 och x_2 som funktioner av x_0 och λ. Kan du säga något allmänt om x_n som funktion av x_0, λ och n?

1.2. **Andra exempel på iterativa metoder.** Iterationer används och uppkommer i många andra sammanhang än det ovan nämnda fallet med populationsmodeller.

- Newton-Raphsons metod används vid numerisk lösning av ekvationer $g(x) = 0$. Utifrån en initial uppskattning x_0 av den sökta roten beräknas successivt bättre approximationer $x_n = N_g\left(x_{n-1}\right)$, där $N_g(x) = x - g(x)/g'(x)$. Detta kan du läsa mer om i t.ex. din gymnasielitteratur och likaså i de flesta läroböcker i en-variabel analys. Newton-Raphsons metod kan också användas då man söker komplexa rötter till t.ex. ett polynom, detta leder till iteration av en rationell funktion definierad i det komplexa talplanet. Man stöter då på helt nya fenomen, Figur 1.
- Numeriska metoder för lösningar av differentialekvationer bygger också på iterativa procedurer. Är du intresserad kan du t.ex. läsa i kapitel 9 i Zill-Cullen.
- Iterationer kan också göras i högre dimensioner. Långtidsprognoserna för vädret baseras på en iterativ modell med många tusen variabler, där varje iterationssteg räknar fram vädersituationen ca. 10 minuter.
- Iterationer (diskreta dynamiska system) är ett livaktigt forskningsområde i sig inom matmematiken, relaterat till s.k. “kaos-forskning” och fraktaler. Här nedan kommer vi att beröra iterationer i en reell variabel samt iterationer av kvadratiska funktioner i det komplexa talplanet.



Figur 1. Bilden visar en del av det komplexa talplanet, med origo i mitten där de vita spetsarna möts. Det vita området utgörs av de komplexa tal som konvergerar mot roten $z = 1$ till $z^3 - 1 = 0$ under Newton-Raphson-iteration. Detta är ett exempel på hur s.k. *fraktaler* naturligt uppstår i samband med dynamiska system. Bilden är tagen ur [**PR**], där du också kan läsa mer om detta.

2. Numeriska experiment med reella andragradspolynom

. Låt oss experimentera med att iterera kvadratiska funktioner av formen

$$Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad \text{där } 0 < \lambda \leq 4 \text{ är en parameter och } 0 \leq x \leq 1 \,.$$

Det är lätt att visa att villkoret $0 < \lambda \leq 4$ gör att Q_λ avbildar intervallet $[0, 1]$ in i sig självt, dvs. $0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq Q_\lambda(x) \leq 1$.

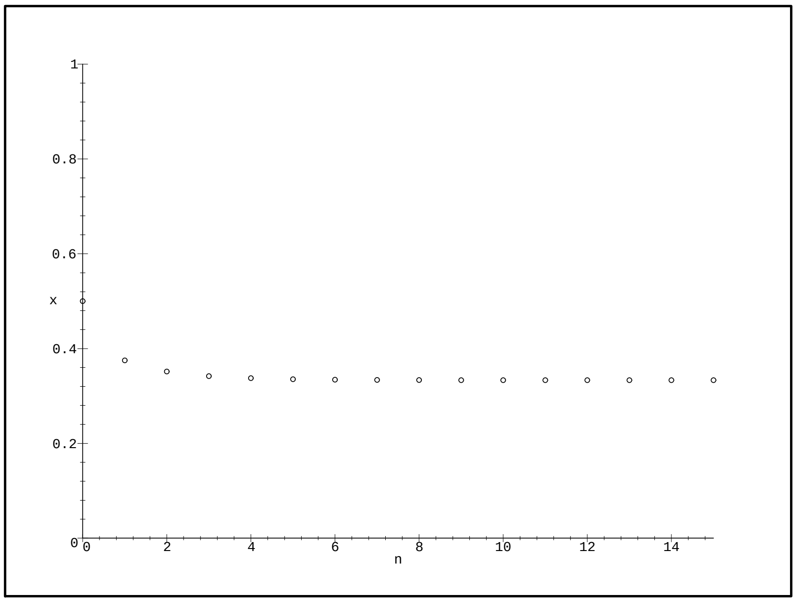
Övning 2.1. Bevisa detta påstående!

Vi väljer nu först $\lambda = 3/2$, och iterar $Q_{3/2}$ med ett par olika initialvärden. Med $x_0 = 0.50$ får vi (med två decimaler)

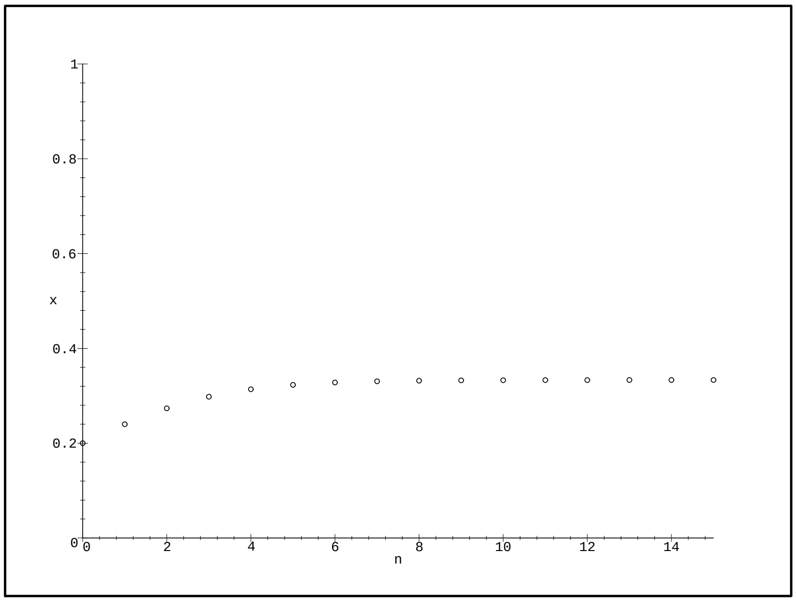
$$0.50 \xrightarrow{Q_{3/2}} 0.38 \xrightarrow{Q_{3/2}} 0.35 \xrightarrow{Q_{3/2}} 0.34 \xrightarrow{Q_{3/2}} 0.33 \xrightarrow{Q_{3/2}} 0.33 \xrightarrow{Q_{3/2}} \ldots$$

$x_n = Q^n_{3/2}(1/2)$ tycks konvergera mot $x = 1/3$. Vi kan se detta tydligt i Figur 2 där vi har plottat x_n mot n.

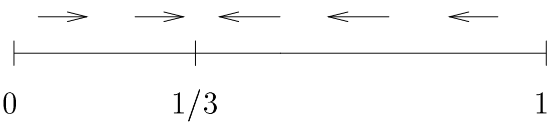
.



FIGUR 2. Iterat av Q_λ med $\lambda = 3/2$ och $x_0 = 1/2$.



FIGUR 3. Iterat av Q_λ med $\lambda = 3/2$ och $x_0 = 1/5$.



FIGUR 4. $x = 1/3$ är en attraktor till $Q_{3/2}$.

Vi itererar nu $Q_{3/2}$ med starvädet $x_0 = 0.20$ med och plottar, se Figur 3.

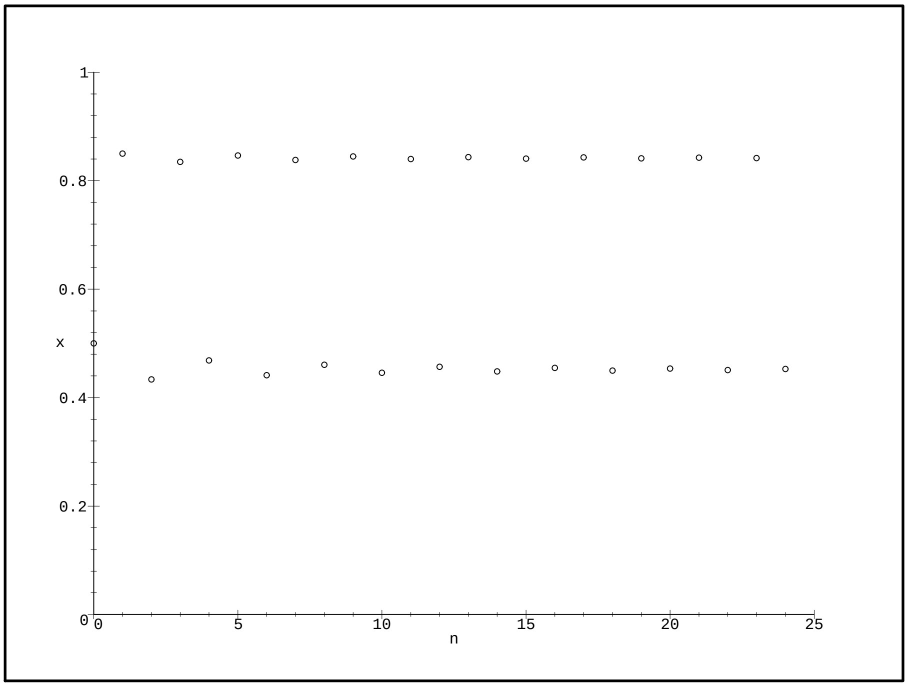
x_n tycks åter stabilisera sig kring punkten $x = 1/3$. I själva verket är det så att för alla startvärden $0 < x_0 < 1$ får vi samma asymptotiska beteende:

$$\lim_{n\to\infty} Q^n_{3/2}(x_0) = 1/3.$$

Man säger att $x = 1/3$ är en *attraktor* till $Q_{3/2}$.

Observera också att $Q_{3/2}(1/3) = 1/3$, så $x = 1/3$ är vad man kallar en *fixpunkt* till $Q_{3/2}$.

Låt oss nu pröva med ett annat parametervärde, vi väljer $\lambda = 3.4$. Med startvärdet $x_0 = 0.5$, itererar vi $Q_{3.4}$ och plottar x_n mot n i Figur 5

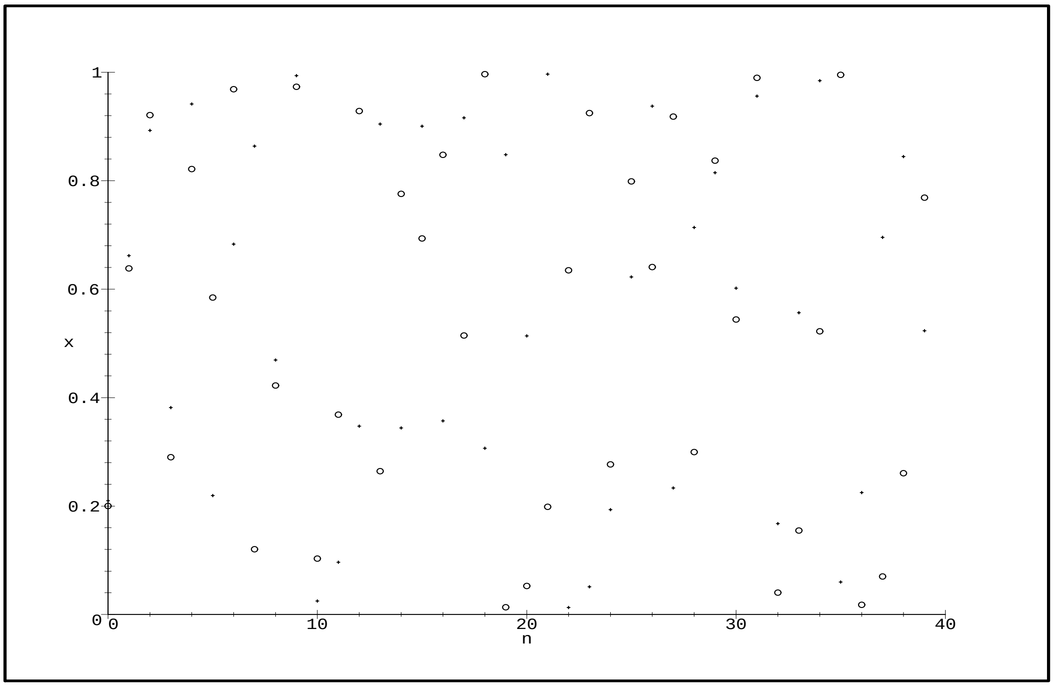


FIGUR 5. Iterat av Q_λ med $\lambda = 3.4$ och $x_0 = 0.5$.

Det visar sig att de allra flesta startvärden x_0 kommer att resultera i samma långtidsbeteende, banan svänger in mot ett och samma periodiskt förlopp. Närmare bestämt finns det två punkter $q_1 \approx 0.45$ och $q_2 \approx 0.84$, som är sådana

$Q_{3.4}(q_1) = q_2$ och $Q_{3.4}(q_2) = q_1$, dvs. $Q_{3.4}$ avbildar dem på varandra. Nästan alla (i en väldigt precis mening, som vi inte går in på här) startvärden x_0 resulterar i banor som svänger in mot detta 2-periodiska förlopp $q_1 \to q_2 \to q_1 \dots$. Det första faktumet, att $Q_{3.4}(q_1) = q_2$ och $Q_{3.4}(q_2) = q_1$, uttrycker vi genom att säga att $\{q_1, q_2\}$ är en *periodisk bana* (alternativt *cykel*) till $Q_{3.4}$. Det andra faktumet, att de flesta banor konvergerar mot denna cykel, uttrycker vi genom att säga att denna cykel är en *attraktor*, en *attaktiv periodisk bana.*

Låt oss avsluta med att välja $\lambda = 4$. Vi plottar de 40 första punkterna på de två banor som har initialvärde $x_0 = 0.20$ respektive $\tilde{x}_0 = 0.21$. Vi ser i Figur 6



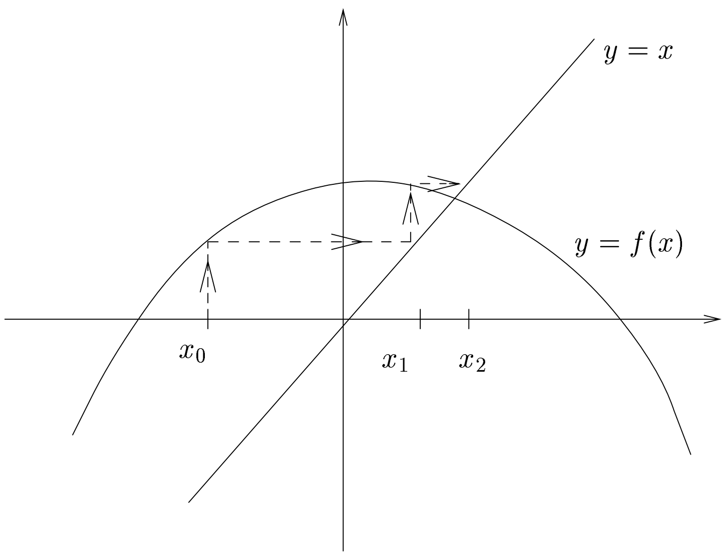
FIGUR 6. $\lambda = 4$ och $x_0 = 0.20$ respektive $\tilde{x}_0 = 0.21$. Observera hur närliggande värden snabbt separerar under iteration, s.k. *känsligt beroende på begynnelse-villkor.*

att banorna har ett mycket mer komplicerat beteende än det vi har sett tidigare. Vi ser också hur banorna, som startar nära varandra snabbt avlägsnar sig ifrån varandra. Efter 7 iterat befinner de sig i varsin ände av intervallet; en osäkerhet i 2:a decimalen av x_0 gör att vi inte kan förutsäga läget av x_7 överhuvudtaget! Minskar vi osäkerheten i begynnelsevärdet till storleksordningen 10^{-k} kommer banorna ändå att separeras helt redan efter $\sim k$ steg. Jämför detta med den situation vi såg tidigare, när vi hade en attraktiv fixpunkt eller cykel; då kunde vi förutsäga långtidsbeteendet exakt utan att veta var vi startade överhuvudtaget!

Övning 2.2. Experimentera nu vidare själv. Från kurshemsidan kan du ladda ner en körfärdig Maple-fil, `iterera.mws`, med vars hjälp du kan göra egna experiment. Beroende på hur du väljer parametern λ får du olika typer av beteenden. De fall vi har sett härovan är bara början och slutet på en lång historia!

3. Grafisk Iteration

Ett enkelt sätt att undersöka iterationer av en en-variabel funktion $f(x)$ är med s.k. grafisk iteration. Ett exempel ses i Figur 7.



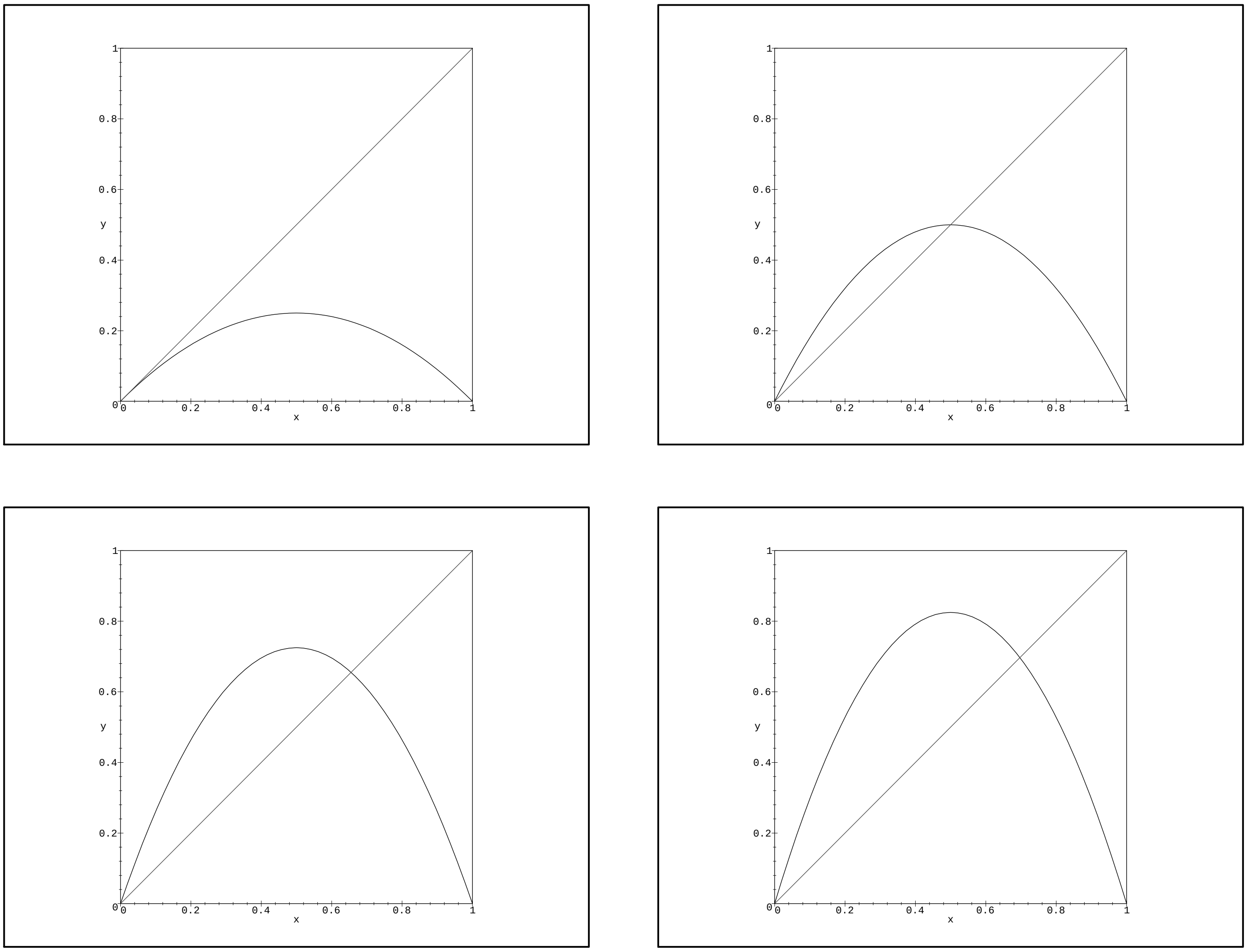
Figur 7. Grafisk iteration.

(I) Rita grafen $y = f(x)$ och linjen $y = x$ i samma figur.
(II) Välj ett startvärde x_0 på x-axeln.
(III) Gå lodrätt från x_0 till f:s graf, dvs till punkten $(x_0, f(x_0))$.
(IV) Vi vill hitta $f(x_0)$ på x-axeln snarare än på y-axeln: Gå horisontellt från $(x_0, f(x_0))$ till linjen $y = x$, dvs. till punkten $(f(x_0), f(x_0))$.
(V) Om du vill lokalisera $x_1 = f(x_0)$ på x-axeln, gå lodrätt från $(f(x_0), f(x_0))$ till x-axeln.
(VI) Om du vill fortsätta att iterera, gå lodrätt från $(f(x_0), f(x_0))$ till grafen $y = f(x)$, osv.

Observera att en fixpunkt q till f, $f(q) = q$, återfinns som skärningen mellan f:s graf och linjen $y = x$.

Kommentar. Om $x_n = f(x_{n-1})$ modellerar säg en viss populations dynamik är variabeln x_n *tillståndsvariabeln*, den som beskriver populationens storlek. x-axeln kallas därför *tillständsrum* (eller *fasrum*). Vi vill förstå hur följden $\{x_n\}_n$ rör sig i tillståndsrummet. I ovanstående procedur rör sig $\{x_n\}_n$ snarare längs diagonalen $y = x$, men det kan ju lätt omtolkas till en rörelse på x-axeln.

Övning 3.1. Undersök medlemmarna i den kvadratiska familjen Q_λ i Figur 8 med grafisk iteration. I de fall du hittar en attraktiv fixpunkt eller periodisk bana, ge



FIGUR 8. Q_λ med $\lambda = 1, 2, 2.9$ resp. $\lambda = 3.3$.

om möjligt exempel på ett startvärde som ej konvergerar mot denna attraktor. Jämför gärna med datorkörningar.

4. Fixpunkter

Definition 2. En punkt q är en fixpunkt till f om $f(q) = q$.

Övning 4.1. Bestäm alla fixpunkter till Q_λ för $0 < \lambda \leq 4$.

Övning 4.2. Visa att om f är en kontinuerlig funktion, och om q är en sådan punkt att det för någon initialvärde x_0 gäller att $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = q$, så måste $f(q) = q$.

Definition 3. Om q är en fixpunkt till funktionen f, och om det finns ett öppet intervall J innehållande q sådant att för alla $x_0 \in J$ gäller att $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = q$ sägs q vara en *attraktiv* (*stabil*) fixpunkt till f.

En attraktiv fixpunkt kommer alltså att attrahera alla banor som kommer i dess närhet. I våra experiment tidigare såg vi att $Q_{3/2}$ hade en attraktiv fixpunkt i $x = 1/3$.

Motsatsen till en attraktiv fixpunkt är en repellerande fixpunkt. Då gäller att banor som startar nära fixpunkten avlägsnar sig under iteration. Formellt kan vi definiera detta på följande sätt.

Definition 4. En fixpunkt q till en funktion f sägs vara *repellerande* (*instabil*) om det finns ett öppet intervall J innehållande q sådant att för alla $x_0 \in J$, $x_0 \neq q$, finns det ett n sådant att $f^n(x_0) \notin J$.

Övning 4.3. Avgör med hjälp av grafisk analys för vilka värden på λ som fixpunkten $x = 0$ till Q_λ är attraktiv respektive repellerande.

Övning 4.4. Undersök dynamiken kring fixpunkterna i Figur 9.

Efter ovanstående övningar leds man till följande sats:

Sats 1. *Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion med kontinuerlig derivata $f'(x)$ och med en fix-punkt p. Då gäller att*

(i) $|f'(p)| < 1 \implies$ *p är attraktiv (stabil);*
(ii) $|f'(p)| > 1 \implies$ *p är repellerande (instabil).*

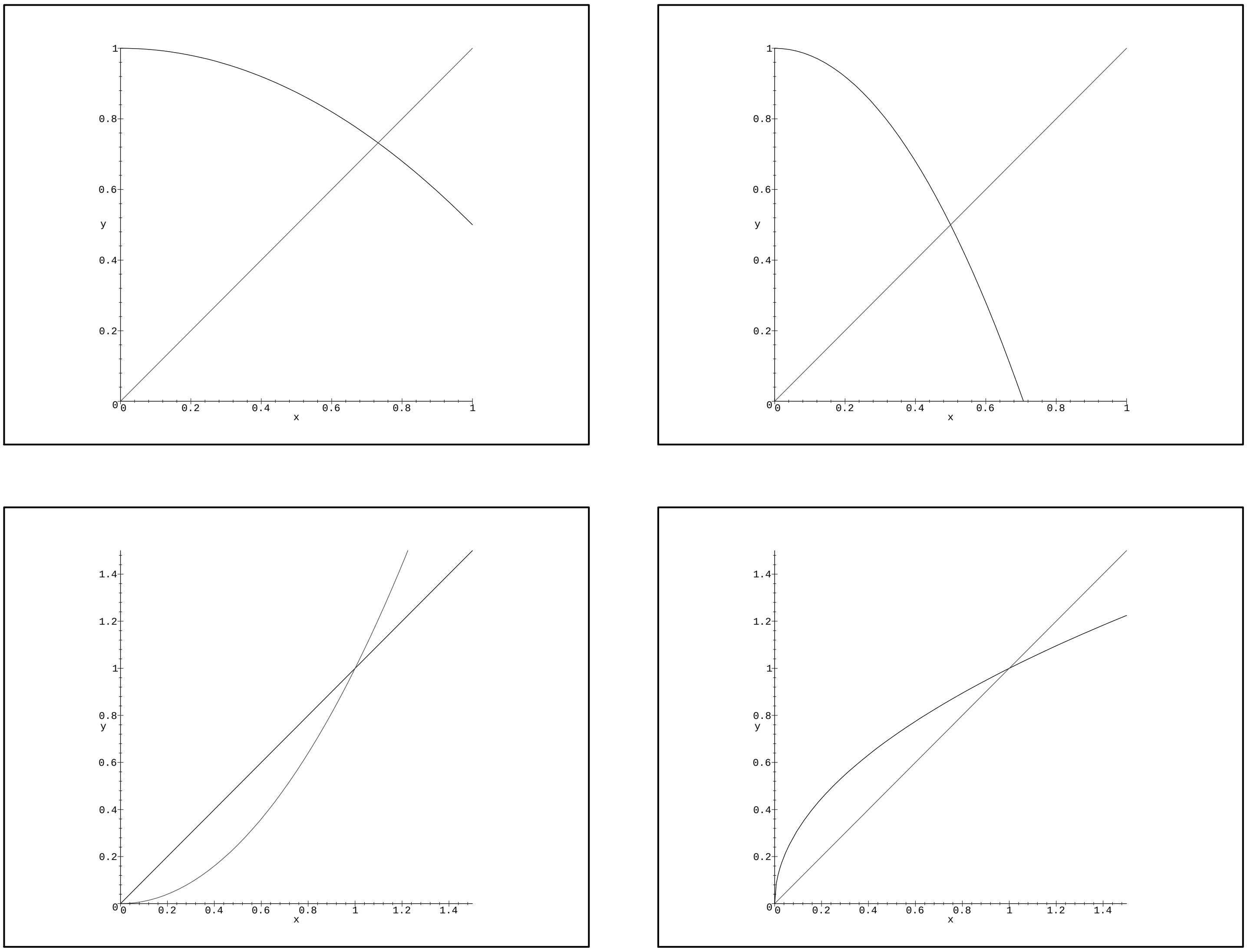
Kommentar. Om $|f'(p)| = 1$ kan man generellt inte dra någon slutsats om stabiliteten.

Övning 4.5. Bevisa Sats 1. (Tips: Använd Medelvärdessatsen och derivatans kontinuitet.)

Övning 4.6. Du har tidigare i Övning 4.1 beräknat fixpunkterna till $Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. För vilka värden på λ är dessa stabila?

Övning 4.7. Antag att vi modellerar ett verkligt fenomen, säg en populationsstorlek, med ett dynamiskt system som det i ekvation (2), och att detta system har en fixpunkt q.

(a) Vad svarar fixpunkten mot i det fenomen vi modellerar?
(b) Motivera följande påstående: Fixpunkten q måste vara stabil för att vara observerbar i det verkliga systemet.



FIGUR 9. Undersök beteendet kring fixpunkterna med grafisk iteration!

5. PERIODISKA BANOR

Definition 5. En punkt x är *periodisk med period* p under iteration med f om $f^p(x) = x$, men $f^j(x) \neq x$ för $j = 1, 2, \ldots p-1$:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} f^{p-1}(x) \xrightarrow{f} f^p(x) = x.$$

Mängden $\{x, f(x), \ldots f^{p-1}(x)\}$ kallas en *periodisk bana* eller en *cykel.*

Exempel 1. $f(x) = 1 - x^2$ har en 2-periodisk bana $\{0, 1\}$.

Precis som fixpunkter så kan periodiska punkter vara attraktiva (stabila) eller repellerande (instabila).

Definition 6. En periodisk punkt q till f med period p sägs vara attraktiv om q är en attraktiv fixpunkt till f^p. En periodisk punkt q till f med period p sägs vara repellerande om q är en repellerande fixpunkt till f^p.

Vi såg tidigare i våra experiment i kapitel 2 att $Q_{3.4}$ har en attraktiv 2-cykel bestående av punkterna $q_1 \approx 0.45$ och $q_2 \approx 0.84$, och i Övning 3.1 bör du också ha sett att även $Q_{3.3}$ har en stabil periodisk bana av längd 2.

Nästa sats hjälper oss att förstå hur vi kan använda derivatan även för att bestämma cyklers stabilitet.

Sats 2. *Antag att f är en deriverbar funktion. Då ges derivatan av n:te iteratet av f av*

$$\left(f^n\right)'(x) = \prod_{i=0}^{n-1} f'\left(f^i(x)\right).$$

Övning 5.1. Bevisa denna sats. Tips: Använd kedjeregeln! Undersök först f^2 och f^3 innan du ger dig på att bevisa det allmänna fallet.

Sats 3. *Antag att f är en deriverbar funktion och att q_1 är en p-periodisk punkt till f med bana $\{q_1, q_2, q_2, \ldots, q_p\}$. Då gäller att*

$$\left(f^p\right)'(q_1) = \left(f^p\right)'(q_2) = \ldots \left(f^p\right)'(q_p) = \prod_{i=1}^{p} f'(q_i).$$

Detta säger att i alla punkter på en periodisk bana, med längd p, har derivatan av f^p ett och samma värde, och detta värde ges av produkten av f:s derivator längs den periodiska banan! Speciellt betyder det att punkterna på en periodisk bana alla har samma stabilitetsegenskaper.

Sats 4. *Med samma förutsättningar som i Sats 3 gäller att*

(i) *om $\prod_{i=1}^{p} |f'(q_i)| < 1$ är banan attraktiv (stabil);*
(ii) *om $\prod_{i=1}^{p} |f'(q_i)| > 1$ är banan repellerande (instabil).*

Kommentar. Precis som för fixpunkter gäller att om $\prod_{i=1}^{p} |f'(q_i)| = 1$ kan man generellt inte dra några slutsatser.

Övning 5.2. Undersök om den periodiska banan $\{0, 1\}$ till $f(x) = 1 - x^2$ är attraktiv eller repulsiv.

Övning 5.3. Vi har numeriskt sett att $Q_{3.4}$ har en attraktiv 2-cykel $\{q_1, q_2\}$. Beräkna produkten $Q'_{3.4}(q_1)Q'_{3.4}(q_2)$ med $q_1 \approx 0.45$ och $q_2 \approx 0.84$. verifiera på så sått att banan är attraktiv.

Övning 5.4. Bevisa Sats 3. Tips: Använd Sats 2.

Övning 5.5. Bevisa Sats 4. Tips: Använd Sats 1, definitionen av stabilitet och Sats 3.

6. Den kvadratiska familjen.

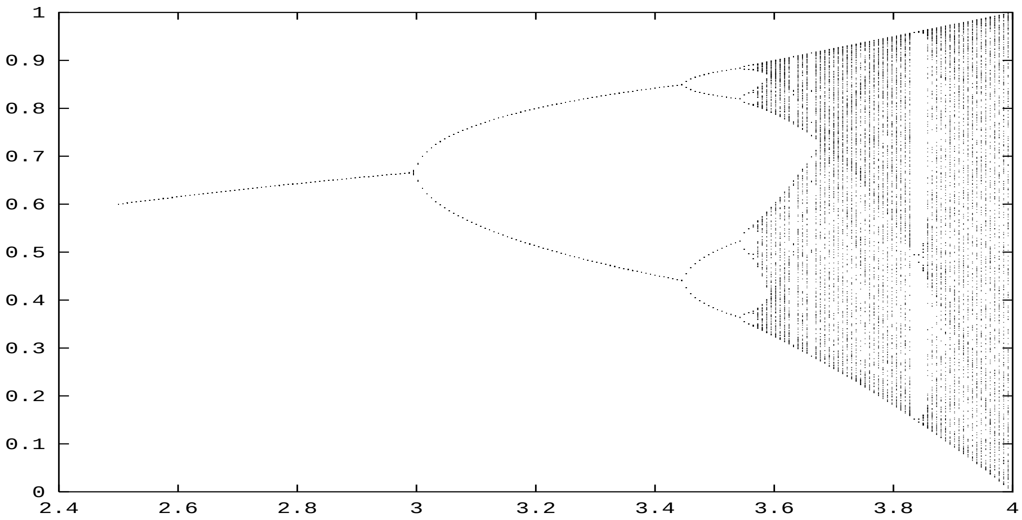
Vi sammanfattar här informellt och kortfattat några kända resultat om de dynamiska systemen $Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, $0 < \lambda \leq 4$, de flesta sprugna ur den livaktiga forskning som har bedrivits på detta område de senaste decenierna.

Vi har sett att för vissa värden på λ har systemet en attraktiv fix-punkt, för andra värden attraktiva periodiska banor av högre period, och för ytterligare andra värden iakttar vi ett mer komplicerat, till synes kaotiskt förlopp. Det är bevisat att för var och en av funktionerna i den kvadratiska familjen, dvs. för varje parametervärde $0 < \lambda \leq 4$, finns det en attraherande mängd Ω_λ som attraherar nästan alla startvärden. (Begreppet "attraherar nästan alla startvärden" har faktiskt en precis tolkning: Välj ett x_0 slumpvis med likformig sannolikhetsfördelning i $[0,1]$. Då kommer x_0:s bana att med sannolikhet 1 konvergera mot Ω_λ.) Denna attraktor kan vara en fixpunkt eller en periodisk bana, men också något mer komplicerat som en s.k. Cantormängd (en typ av fraktal) eller t.o.m. bestå av hela intervall. Det sistnämnda fallet betyder alltså att typiska startvärden kommer att irra runt så våldsamt under iteration att deras bana till slut tenderar att fylla ut hela delintervall av $[0,1]$. Vi går inte närmare in på dessa mer komplicerade fall.

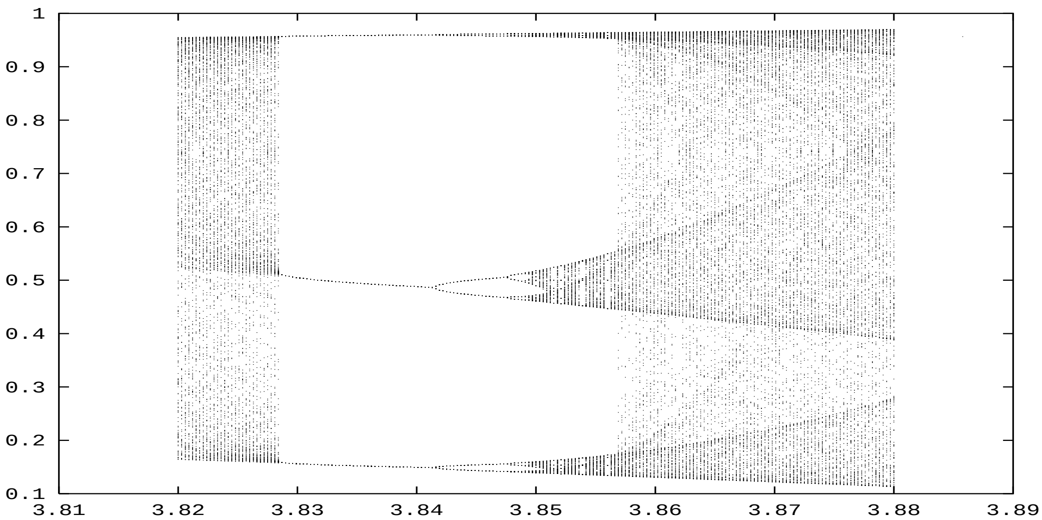
Vi gör följande experiment för att se hur attraktorn ser ut för olika värden på λ: För, säg, 200 olika värden på λ itererar vi ett och samma startvärde x_0, ett stort antal gånger. Vi plottar sedan banan mot λ, dvs. över varje λ ser vi de punkter som x_0 besöker under iteration med Q_λ. Då vi endast är intresserade av det asymptotiska beteendet utelämnar vi de , säg, 300 första punkterna från varje bana och plottar de 300 nästföljande, då banan kan tänkas röra sig mycket nära attraktorn. Det vi ser, i Figur 10, är hur attraktorn Ω_λ beror av λ. Eftersom var och en av attraktorerna Ω_λ attraherar nästan alla x, får vi samma utseende i princip oberoende av valet av x_0. Ett sådant här diagram kallas ett *bifurkationsdiagram*.

Vi ser tydligt att för $\lambda < \lambda_1 = 3$ är attraktorn en fix-punkt. För $\lambda_1 = 3 < \lambda < \lambda_2 \approx 3.45$ ser vi en attraktiv 2-cykel, varpå följer en 4-cykel och en 8-cykel. I själva verket finns det en växande följd $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ sådan att Q_λ har en attraktiv 2^k-cykel för $\lambda_{k-1} < \lambda < \lambda_k$. Följden λ_k konvergerar mot ett λ_∞ något mindre än 3.6. För $\lambda = \lambda_\infty$ vet man att vi har en attraktor av Cantor-typ, även om det inte går att se i figuren. Man säger att attraktorn genomgår en oändlig följd av *periodfördubblingar* när λ växer upp till λ_∞. För $\lambda > \lambda_\infty$ ser vi en mer komplicerad bild. Vi förstorar upp ett område kring $\lambda \approx 3.85$ (Figur 11).

Vi ser en attraktiv 3-cykel som genomgår periodfördubblingar. Återigen finns en följd $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ sådan att Q_λ har en attraktiv $3 \cdot 2^k$-cykel för $\lambda_{k-1} < \lambda < \lambda_k$. Denna följd konvergerar mot ett gränsvärde ≈ 3.857 för vilket vi har en ny Cantorattraktor. Observera att var och en av de tre grenarna i detta fönster liknar det ursprungliga diagrammet i sin helhet.



FIGUR 10. Attraktorn Ω_λ som funktion av λ.



FIGUR 11. Ett 3-periodiskt fönster.

Ett parameterintervall där Q_λ genomgår periodfördubblingar från en minsta period p till en Cantor-attraktor (en "$p \cdot 2^\infty$ -periodisk attraktor") kallas ett (p-)*periodiskt fönster*. Det finns minst ett men högst ett ändligt antal p-periodiska fönster för varje positivt heltal p. Vi har tittat på 2-fönstret och ett 3-fönster.

I själva verket finns det periodiska fönster överallt i bifurkationsdiagrammet:

Sats 5. *Mängden av alla periodiska fönster är* tät *i parameterintervallet* $[0, 4]$.

Det betyder att varje intervall $A \subset (0, 4]$ av parametervärden, hur litet det än är, innehåller parametervärden som hör till ett periodiskt fönster. Var du en zoomar in i diagrammet hittar du periodiska fönster som är nerskalade versioner av hela diagrammet! Eftersom det bara finns ändligt många av varje period, så har dock alla fönster utom ett fåtal en mycket hög period.

Men trots att mängden av "periodiska" parametervärden är en i denna mening tät mängd av intervall, vart och ett begränsade till höger av ett "Cantor"-parametervärde, finns det ändå plats kvar på parameterintervallet för attraktorer av intervall-typ.

Sats 6. *Om vi väljer parametern λ slumpvis med likformig sannolikhetsfördelning ur parameterintervallet* $(0, 4]$*, har vi en positiv sannolikhet att finna ett λ sådant att Ω_λ är en intervall-attraktor*

Man kan visa att $\lambda = 4$ är ett sådant parametervärde, och om man begränsar sig till att slumpa ut parametervärden nära 4 har man en hög sannolikhet att träffa på en intervall-attraktor. Detta betraktas som ett av de viktigaste resultaten inom teorin för dynamiska system. Dessa interval attraktorer är associerade med vad vi kallar *kaotisk* dynamik, som vi såg exempel på i experimentet med Q_4 i kapitel 2. Informellt talat kallar man ett dynamiskt system kaotiskt om små skillnader i initialvärden växer snabbt under iteration. Det betyder att minsta osäkerhet i startvärdet gör att det blir fullkomligt omöjligt att förutsäga banan i det långa loppet. Betänk att verkliga fenomen alltid är behäftade med mätfel; om den relvanta modellen då är ett kaotiskt sytem har vi den märkliga situationen att fast modellen är helt deterministisk, kommer beteendet att se helt slumpartat ut. Man talar om *deterministiskt kaos*. Sats 6 säger alltså att deterministiskt kaos är ett fenomen att räkna med, något vi med stor sannolikhet stöter på i våra modeller av verkligheten. De svenska matematikerna Lennart Carleson och Michael Benedicks, verksamma här vid KTH, har gett avgörande bidrag til detta område.

Slutligen ska sägas att det som här sagts om familjen $\{Q_\lambda\}$ gäller en stor klass av en-parameterfamiljer av funktioner, det är inte något speciellt just för $\{Q_\lambda\}$.

7. Komplex Iteration

Vi avslutar detta kompendium med en kort introduktion till iteration med kvadratiska polynom i det komplexa talplanet, med syfte att förklara uppkomsten av de s.k. Juliamängderna och den s.k. Mandelbrotmängden. Dessa intrikata geometriska objekt har de senaste åren gärna använts som ikon för matematik i allmänhet och "kaosforskning" i synnerhet, ofta utan någon närmare förklaring.

Vi betraktar polynom av formen

$$P_c(z) = z^2 + c$$

där c är en (komplex) parameter. Observera att oberoende av c är $z = 0$ polynomets kritiska punkt (derivatans nollställe), och att c är funktionsvärdet i den kritiska punkten, $P_c(0) = c$. Låt oss starta med ett exempel.

Vi tar $c = -1$ och prövar ett par olika startvärden.

$$\boxed{1} \xrightarrow{P_{-1}} 1^2 - 1 = \boxed{0} \xrightarrow{P_{-1}} 0^2 - 1 = \boxed{-1} \xrightarrow{P_{-1}} (-1)^2 - 1 = \boxed{0} \xrightarrow{P_{-1}} \boxed{-1} \ldots$$
$$\boxed{i} \xrightarrow{P_{-1}} i^2 - 1 = \boxed{-2} \xrightarrow{P_{-1}} (-2)^2 - 1 = \boxed{3} \xrightarrow{P_{-1}} \boxed{8} \xrightarrow{P_{-1}} \boxed{63} \ldots$$

Iteraten av 1 faller efter ett steg in i en periodisk cykel, medan $\left|P_{-1}^n(i)\right| \to \infty$ när $n \to \infty$.

7.1. **Juliamängder.**

För varje polynom P_c vill vi skilja ut det startvärden som marscherar mot oändligheten från de som håller sig inom ett begränsat område av $\mathbb{C}$. Vi definierar

Definition 7. K_c, den *fyllda Juliamängden* till polynomet P_c, består av alla komplexa tal z sådana att $|P_c^n(z)|$ inte går mot oändligheten när $n \to \infty$:

$$K_c = \left\{ z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} |P_c^n(z)| \neq \infty \right\}.$$

Av vårt exempel ovan ser vi att $1 \in K_{-1}$ och att $i \notin K_{-1}$. Det är lätt att inse att om P_c har en periodisk bana så ligger den med nödvändighet i K_c, och om banan är attraktiv kommer även alla punkter som attraheras av bana att tillhöra K_c.

Vi kan i princip plotta K_c genom att iterera varje bildpunkt i det komplexa planet med P_c, och svärta de punkter som tycks ha en begränsad bana.

Randen ∂A till en mängd A består av de punkter a som är sådana att varje liten cirkel kring a innehåller både punkter som ligger i A och punkter som inte ligger i A. För ”snälla” mängder är randen den kurva som avgränsar mängden. Vi kan nu definiera Juliamängden till P_c.

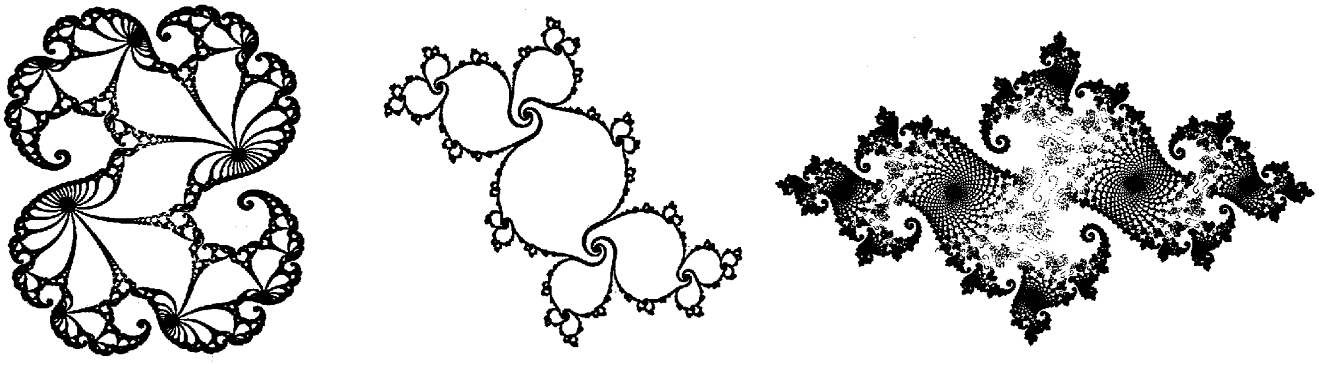
Definition 8. J_c, *Juliamängden* till P_c, är randen till K_c:

$$J_c = \partial K_c.$$

Juliamängden består alltså av de komplexa tal som utgör gränslandet mellan punkter med begränsad repsektive obegränsad bana. I Figur 12 ser vi exempel på Juliamängder.

I regel är Juliamängder komplicerade mängder, de är s.k. *fraktaler.* Ett undantag ges av J_0, Juliamängden till $P_0(z) = z^2$. Eftersom $|z^2| = |z|^2$ ser man att

$$|P_0^n(z)| \begin{cases} \to 0, \quad n \to \infty, & \text{om } |z| < 1; \\ = 1 \quad \text{för alla } n \geq 0 & \text{om } |z| = 1; \\ \to \infty, \quad n \to \infty, & \text{om } |z| > 1. \end{cases}$$



FIGUR 12. Juliamängderna J_c med (från vänster) $c \approx 0.27+0.01i$, $c \approx -0.11 + 0.66i$ och $c \approx -0.75 + 0.11i$. Bilderna är hämtad ur [**PR**].

K_0 är alltså enhetsskivan $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ och J_0 är dess rand enhetscirkeln: $J_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Det inre av K_0, dvs. $K_0 \setminus J_0$, är attraktionsområdet till fixpunkten $z = 0$.

Följande egenskaper, som gäller alla Juliamängder J_c, är inte så svåra att verifiera för specialfallet J_0:

- Juliamängden är fullständigt invariant: $P_c(J_c) = J_c = P_c^{-1}(J_c)$, eller annorlunda uttryckt, $z \in J_c$ om och endast om $P_c(z) \in J_c$.
- Alla repellerande periodiska banor ligger i J_c. Man kan också visa att de repellerande periodiska banorna är *täta* i J_c. Det betyder att J_c består precis av de repellerande periodiska punkterna samt de punkter som kan fås som gränsvärden av dessa.
- Dynamiken på J_c är kaotisk, i den meningen att avståndet mellan närbelägna punkter växer snabbt under iteration.

För J_0 kan det sista påståendet inses på följande sätt: J_0 är cirkeln med radie 1 och medelpunkt i origo, så om $z \in J_0$ är

$$z = e^{2\pi i\theta}$$

för något $0 \leq \theta < 1$ (polär form av z om $|z| = 1$.) Dynamiken på J_0 ges av

$$e^{2\pi i\theta} \longrightarrow e^{2\pi i\theta} \cdot e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i 2\theta},$$

så argumentet θ fördubblas och det betyder att avståndet längs enhets-cirkeln mellan två närliggande punkter fördubblas i ett iterationssteg.

7.2. **Mandelbrotmängden.** När vi studerar bilder av Juliamängder ser vi att vissa tycks vara en sammanhängande mängd, med andra faller sönder i ett otal smådelar. Den kritiska punktens öde avgör vilket av fallen som inträffar. För kvadratiska polynom, som endast har en kritisk punkt, visar det sig att det bara finns två möjligheter. Följande sats beskriver situationen:

Sats 7. *För kvadratiska polynom P_c med Juliamängd J_c och fylld Juliamängd K_c gäller att*

(a) J_c *är sammanhängande* $\iff c \in K_c$, *dvs. iterat av den kritiska punkten är begränsade.*

(b) J_c *är totalt osammanhängande* $\iff c \notin K_c$, *dvs* $\lim_{n\to\infty} |P_c^n(c)| = \infty$.

Totalt osammanhängande betyder att inga två punkter i mängden kan förbindas med en kurva utan att lämna mängden. Likväl kan man visa att ingen av punkterna i en Juliamängd ligger isolerat: varje godtyckligt liten cirkel kring en punkt $z_0 \in J_c$ kommer att innehålla andra punkter i J_c.

Kommentar. Denna sats bevisades av de franska matematikerna Gaston Julia och Pierre Fatou för knappt hundra år sedan, alltså långt innan det fanns någon möjlighet att visualisera dessa mängder med datorns hjälp. Att Julia har fått låna ut sitt namn till Juliamängderna har vi redan sett. För rättvisans skull brukar komplementet till den fyllda Juliamängden, de punkter som har obegränsad bana under iteration, att kallas för Fatoumängden.

Vi definierar nu Mandelbrotmängden

Definition 9. Mandelbrotmängden $\mathcal{M}$ är den delmängd av parameterplanet $\mathbb{C}$ som ges av

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \; J_c \text{ är sammanhängande}\}.$$

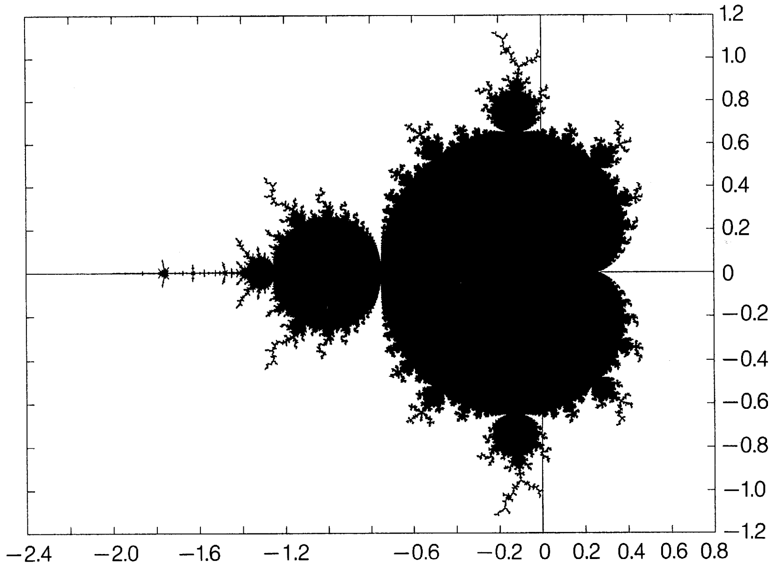
Kommentar. Mandelbrotmängden i sin tur är uppkallad efter Benoit Mandelbrot, en belgisk-amerikansk matematiker som under 1960-talet var en av de första som studerade denna mängd med datorns hjälp.

Observera att vi nu laborerar med två komplexa plan, ett parameterplan $\mathbb{C}_c$ och ett dynamiskt plan (fasrum) $\mathbb{C}_z$.

- För varje $c \in \mathbb{C}_c$ har vi ett dynamiskt system $P_c : \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_z$, med tillhörande Juliamängd $J_c \subset \mathbb{C}_z$.
- $\mathcal{M} \subset \mathbb{C}_c$ är de parametrar c som ger en viss typ av dynamiska system, nämligen sådana med sammanhängande Juliamängd J_c.

Tack vare Sats 6 kan vi i princip rita $\mathcal{M}$ genom att för varje bildpunkt c i parameterplanet iterera den kritiska punkten 0 med P_c, och färga c svart om följden av iterat är begränsad. Resultatet kan beskådas i Figur 13

Vi ser en kardioid-formad största del med utväxter som är uppbyggd av approximativa cirkelskivor och "antenner". Huvudkardioiden består av de c för vilka P_c har en attraktiv fixpunkt. Om vi går till vänster längs reella axeln kommer vi sedan till en cirkelskiva som innehåller de parametervärden som svarar mot en attraktiv 2-cykel. För reella c uppvisar familjen P_c precis samma fenomen som familjen Q_λ, så om vi fortsätter till vänster går vi igenom hela det periodfördubblingsscenario vi redan diskuterat för familjen Q_λ. Längs reella axeln hittar vi en tät mängd av periodiska fönster. Vart och ett av dessa är omgivna av en baby-Mandelbrotmängd i det komplexa planet. När vi når $c = -2$ lämnar vi $\mathcal{M}$.



FIGUR 13. Mandelbrotmängden $\mathcal{M}$. Bilden är hämtad ur [**PR**].

Om vi lämnar huvudkardioiden i någon annan riktning ser vi varianter på samma tema. Cirkelskivorna svarar mot stabila cykler av olika längd, som genomgår periodfördubbling när vi rör oss ut ifrån huvudkardioiden. Randen är en fraktal, den har icke-trivial struktur på alla skalor. T.ex. är "antennerna" fulla av baby-mandelbrotmängder, som var och en är en något förvrängd nerskalad version av hela $\mathcal{M}$ (inklusive baby-mandelbrotmängderna!).

7.3. **Mandelbrotmängden: En katalog över Juliamängder.** Man säger att att z är pre-periodisk under iteration med P_c om z ej är periodisk men faller på en periodisk bana efter ett ändligt antal steg. Så är t.ex. 0 pre-periodisk till en fixpunkt under $P_{-2}(z)$:

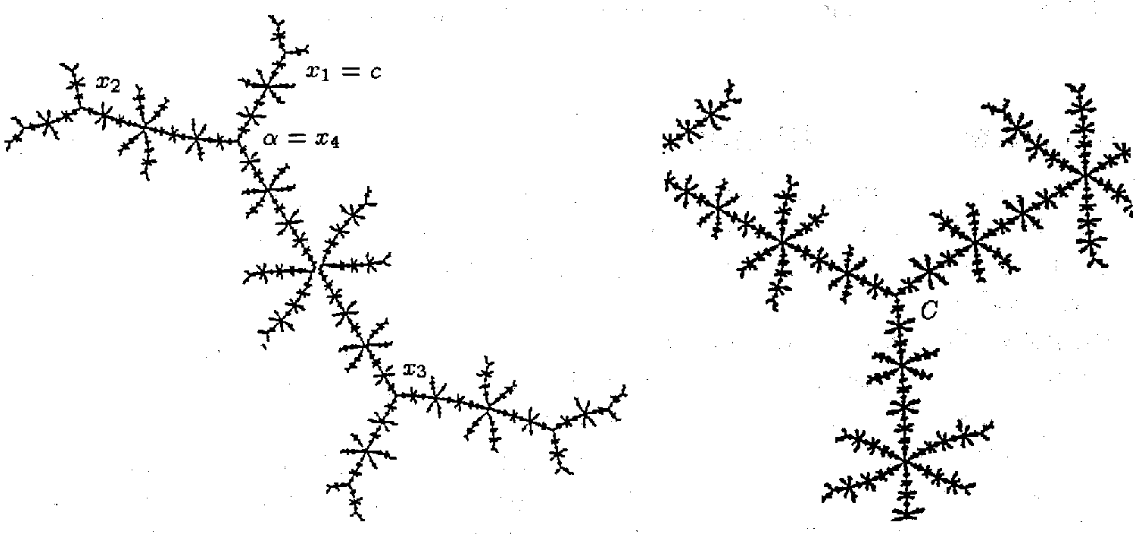
$$0 \xrightarrow{P_{-2}} -2 \xrightarrow{P_{-2}} 2 \xrightarrow{P_{-2}} 2 \ldots.$$

Sats 8. *Låt $\mathcal{P}$ vara mängden av de c sådana att den kritiska punkten 0 är pre-periodisk under P_c. Då gäller att*

(a) *$\mathcal{P}$ är en tät delmängd till randen av $\mathcal{M}$*

(b) *Om $c \in \mathcal{P}$ gäller att $c \in J_c$, och J_c och randen till $\mathcal{M}$ är asymptotiskt lika när man zoomar in kring c i respektive mängd.*

I Figur 14 ges ett exempel på detta. Denna sats säger att randen till $\mathcal{M}$ innehåller bl.a. alla de oändligt många Juliamängderna, som var och en är en fraktal, hörande till polynom med pre-periodisk kritisk punkt. Inte undra på att randen har en komplicerad struktur.



FIGUR 14. Lokal likhet mellan Juliamängden J_c (t.v.) och Mandelbrotmängden $\mathcal{M}$ nära c. (t.h.). Bilden är tagen ur [**Br**].

För den som vill läsa mer om komplex dynamik, rekommenderas Bodil Branners artikel i Normat, [**Br**]. I [**PR**] finns många vackra bilder av Juliamängder och Mandelbrotmängden. Där kan man också läsa om algoritmer för att generera sådana bilder, och om teorin bakom bilderna.

8. Referenser.

[**Be**] Benedicks, Michael *Periodfördubbling till kaos.* Normat 31 (1983) no. 4, 160–172.

[**Br**] Branner, Bodil *Komplekse dynamiske systemer. Fraktaler — opstået ved iteration.* Normat 37 (1989) no. 3, 93–120.

[**D**] Devaney, Robert Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, Redwood City (1989) ISBN: 0-201-13046-7

[**DK**] Devaney, Robert & Keen, Linda (Ed.) Chaos and Fractals: the mathematics behind the computer graphics. Proceedings of symposia in applied mathematics, vol 39. The American Mathematical Society, Providence (1989). ISBN

[**Ma**] May, R.M. *Simple mathematical models with very complicated dynamics.* Nature 261 (1976), 459–466

[**Mu**] Murray, J.D. Mathematical Biology. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York (1993). ISBN 3-540-57204-X

[**PR**] Peitgen, Heinz-Otto & Richter, Peter H. The Beauty of Fractals. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1986). ISBN 3-540-15851-0.

[**T1**] Thunberg, Hans. *Iterationer.* Ett opublicerat kompendium, som delvis sammanfaller med detta kompendium, men som bl.a innehåller ytterligare övningar. Finns på

`http://www.math.kth.se/~thunberg/popular.htm`

[**T2**] Thunberg, Hans. *Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics* SIAM Reviews 43 (2001), No. 1, 3-30. En utförligare framställning om iterationer och dess tillämpningar inom populationsdynamik.

Institutionen för Matematik, KTH, 100 44 Stockholm
E-mail address: thunberg@math.kth.se