5B1212 Tentamen 14/1 2006
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Stationära lösningar bestäms av

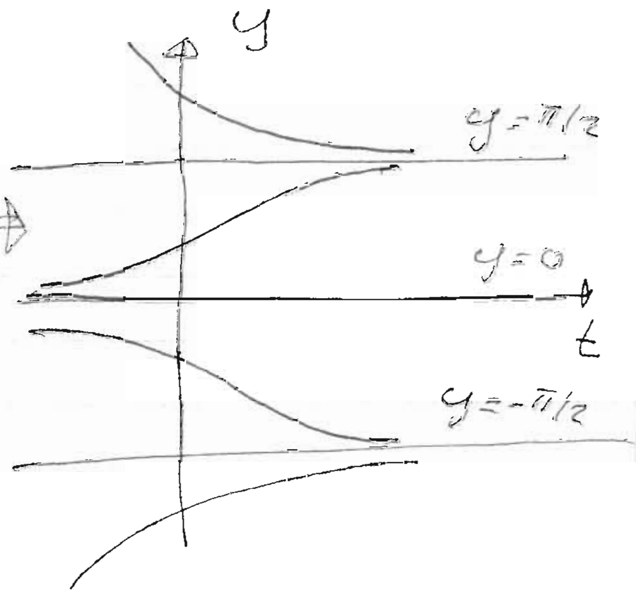
$$y \cos y = 0 \iff y = 0 \text{ eller } \cos y = 0$$

$$\overset{[-\pi < y < \pi]}{\iff} \quad y = -\frac{\pi}{2},\ y = 0 \text{ eller } y = \frac{\pi}{2}.$$

Teckentabell

		$-\pi/2$				$\pi/2$	
y	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\cos y$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$y' = y\cos y$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\Longrightarrow$



SVAR: $y = -\frac{\pi}{2}$ och $y = +\frac{\pi}{2}$ är stabila stationära lösningar i $(-\pi, \pi)$

$y = 0$ är instabil stationär lösning.

Inga andra stationära lösningar i $(-\pi, \pi)$.

2. Vi löser först den homogena ekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Den har karaktäristisk ekvation

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0 \implies r = 1 \text{ dubbelrot}$$

$$\implies y_h(x) = (Ax+B)e^x.$$

Vi bestämmer nu en partikulärlösning.
(Ansats $y_p = ae^x$ fungerar ej tg ae^x är en homogen lösning, detsamma gäller $y_p = (ax+b)e^x$)

Vi ansätter $y_p = u(x)e^x$ ("reduktion av ordning")

$$\implies y_p' = u'e^x + ue^x, \quad y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x.$$

Insatt i given D.E. fås

$$(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - 2(u'e^x + ue^x) + ue^x = 2e^x$$

$$\iff u''e^x = 2e^x \iff u'' = 2$$

$$\iff u(x) = x^2 + ax + b \quad \left(\substack{\text{tag} \\ a=b=0}\right) \implies y_p(x) = x^2e^x$$

<u>SVAR:</u> $y(x) = (x^2 + Ax + B)e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$ godtyckliga.

[Vid bestämning av partikulärlösning går det även bra med ansatsen $y_p = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ eller med s.k. VARIATION AV PARAMETRAR]

Egenvärdes metoden:

3. $0 \overset{\text{SÄTT}}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda-2)^2 + 4$

$\Leftrightarrow \quad (\lambda-2)^2 = -4 \Leftrightarrow (\lambda-2) = \pm 2i$

$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \pm 2i$, dvs två komplexa egenvärden.

$\lambda = 2+2i$ ger en komplex egenvektor $\bar{K}_{\mathbb{C}} \neq \bar{0}$ s.a.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-(2+2i) & 5 \\ -1 & 3-(2+2i) \end{pmatrix}}\bar{K}_{\mathbb{C}} = \bar{0}$$

$$= \begin{pmatrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} (-1) \; (-1-2i) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1+2i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{K}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (t.ex)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får en komplexvärd lösning

$$\bar{X}_{\mathbb{C}} = e^{(2+2i)t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= e^{2t}(\cos 2t + i\sin 2t)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

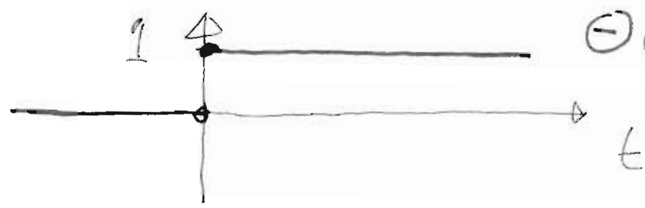
$$= e^{2t}\left[\left(\cos 2t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 2t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + i\left(\cos 2t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 2t\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}\right.\right.$$

$Re(\bar{X}_{\mathbb{C}})$ och $Im(\bar{X}_{\mathbb{C}})$ är båda lösningar var och för sig, och dessutom linjärt oberoende.

SVAR: $\bar{X}(t) = e^{2t}\left[A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right) + B\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 2t\right.\right.$

4.

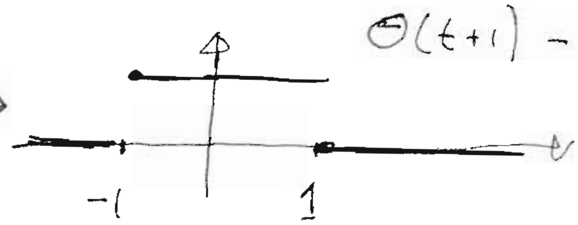
a)



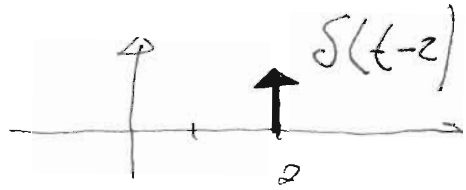
$\Theta(t)$,

$\delta(t)$

$\Rightarrow$

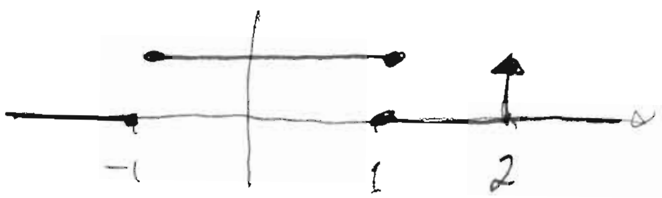


$\Theta(t+1) - \Theta(t-1)$,



$\delta(t-2)$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \Theta(t+1) - \Theta(t-1) + \delta(t-2)$$



En signal som är "av" ($\equiv 0$) för $t < -1$
"på" med konstant nivå $= 1$ för $-1 < t < 1$
samt "av" ($\equiv 0$) för $t > 1$, förutom
en momentan enhetspuls i $t = 2$.

b)

$$\tilde{\mathcal{F}}\{f(t)\} \underset{=}{\text{linjäritet}} \tilde{\mathcal{F}}\{\Theta(t+1) - \Theta(t-1)\} + \tilde{\mathcal{F}}\{\delta(\overset{t-2}{t})\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}\{\Theta(t+1) - \Theta(t-1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\Theta(t+1) - \Theta(t-1)) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right) = \frac{i}{\omega}(-2i \sin\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}\{\delta(t-2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-i\omega t} dt = e^{-2i\omega}$$

<u>SVAR:</u> $\tilde{\mathcal{F}}\{f(t)\}(\omega) = \dfrac{2\sin\omega}{\omega} + \cos 2\omega - i\sin 2\omega$

5. Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} e^y(x-y) = 0 & (1) \\ x^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow x = y$, insatt i (2) fås $y^2 - y = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ eller $y = 1$. $(0,0)$ och $(1,1)$ enda krit. pkt.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(e^y x - e^y y) & \frac{\partial}{\partial y}(e^y x - e^y y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^y & xe^y - ye^y - e^y \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ som har egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ instabil krit. pkt. av sadel typ.

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} e & -e \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$ har egenvärden som ges av

$$0 = \begin{vmatrix} e-\lambda & -e \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1-e)\lambda - e + 2e = \lambda^2 + (1-e)\lambda + e$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{e-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(e-1)^2}{4} - \frac{4e}{4}} = \frac{e-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{e^2 + 1 - 6e}$$

Eftersom $e - 1 > 0$ och $e^2 + 1 - 6e < 0$ är egenvärdena komplexa med positiv realdel

$\Rightarrow$ $(1,1)$ instabil spiral

6.

Vi söker lösningen av formen $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

$\Rightarrow$ $u_x = X'T$ och $u_t = XT'$. Då är

$$u_t + 2u_x = 0 \Leftrightarrow XT' + 2X'T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XT' = -2X'T \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = -\frac{T'}{2T} = \gamma$$

konstant

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = \gamma X & (1) \\ T' = -2\gamma T & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $X(x) = Ae^{\gamma x}$

(2) $\Leftrightarrow$ $T(t) = Be^{-2\gamma t}$ så vi får lösningen

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) = C_1 e^{\gamma x} e^{-2\gamma t} = C_1 e^{(x-2t)\gamma}$$

Villkoret $u(0,0) = 1$ ger

$$\underline{1} = u(0,0) = C_1 e^{0\gamma} = \underline{C_1}, \quad u(x,t) = e^{(x-2t)\gamma}$$

Villkoret $u_x = 3u$ ger

$$u_x = \gamma e^{(x-2t)\gamma} = 3e^{(x-2t)\gamma}$$

$$\Rightarrow \gamma = 3$$

<u>SVAR:</u> $\underline{u(x,t) = e^{3(x-2t)}}$

7. a) $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1$, $x > 0$. Linjär i u.

$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ är integrerande faktor:

$$\underbrace{\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2}u} = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}u\right\} = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}u = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x + C_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{u(x) = -x\ln x + C_1 x}}$$

b) $y = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$, $u = \frac{1}{y}$

Så $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2$ övergår efter substitution i

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}\frac{1}{u} = \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -1$$

$$\Leftrightarrow \text{(enligt a)} \quad u(x) = -x\ln x + C_1 x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{-x\ln x + C_1 x}}}$$

<u>Svar:</u> a) $u(x) = -x\ln x + C_1 x = (C_1 - \ln x)x$

b) $y(x) = \frac{1}{(C_1 - \ln x)x}$

8. Låt $\overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}$, $\overline{X}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, $\overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

I) Vi visar först att $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ och $\overline{X}_3$ uppfyller den homogena ekvationen $\overline{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{X}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t} = -\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} = \overline{X}_1'$

- $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} = -2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \overline{X}_2'$

- $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \overline{X}_3'$

II) Eftersom $\begin{vmatrix} \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \overline{X}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-t} & -3e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -5e^{-t} & e^{-2t} & e^{3t} \end{vmatrix}$

$$= \underbrace{e^{-t} \cdot e^{-2t} \cdot e^{3t}}_{=1} \begin{vmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; (-1) \; (-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{kolonn}}{\overset{3:e}{=}} (-1) \cdot 1 \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \quad \forall t$$

är $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ linjärt oberoende på hela $\mathbb{R}$.

Tre linjärt oberoende lösningar genererar alla lösningar till homogent linjärt 3×3 system $\Rightarrow$

$\overline{X}_h = A\overline{X}_1 + B\overline{X}_2 + C\overline{X}_3$ allmän homogen lösning.

8 forts

III Vi visar nu att $\overline{X}_p = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en lösning till givet system.

$$V.L. = \overline{X}_p' = \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H.L. = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{X}_p + \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ -1 - te^t \\ -te^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ -1 - te^t \\ -te^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ te^t + 1 \\ te^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ -1 - te^t \\ -te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + te^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V.L.$$

Alltså är $\overline{X}_p = \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en lösning.

IV

Allmän lösning ges då av

$$\overline{X}_g = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{allmän} \\ \text{homogen} \\ \text{lösning.}}}{\overline{X}_h} + \overline{X}_p = A\overline{X}_1 + B\overline{X}_2 + C\overline{X}_3 + \overline{X}_p$$

$$= A\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + B\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Svar:</u> JA, enligt ovan

9.

$f(x)$ har en Fourierserie av formen

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

där $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \left\{ \begin{matrix} f \\ \text{jämn} \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\,dx = \left\{ \begin{matrix} |x| \text{ jämn} \\ \Rightarrow \\ |x|\cos nx \text{ jämn} \end{matrix} \right\} =$$

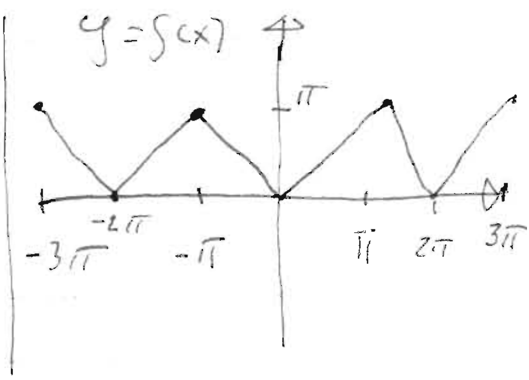
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx\,dx = \left[\begin{matrix} U = x & V = +\frac{\sin nx}{n} \\ dU = dx & dV = \cos nx\,dx \end{matrix} \right]$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ jämnt} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n \text{ udda} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx\,dx = \left\{ \begin{matrix} |x| \text{ jämn} \\ \Rightarrow \\ |x|\sin nx \text{ udda} \end{matrix} \right\} = 0.$$



<u>SVAR:</u> $f(x)$ har Fourierserien

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$$

(10.) Fixpunkter är lösningar till $f_\lambda(x) = x$ dvs

$$\frac{\lambda x}{1+x} = x \iff x = 0 \text{ eller } \frac{\lambda}{1+x} = 1 \iff \underline{x=0} \text{ eller } \underline{x = \lambda - 1}$$

Dvs: För $0 < \lambda \leq 1$ endast en fixpkt i $x = 0$

För $\lambda > 1$ två fixpunkter i $[0, \infty)$, $x = 0$ och $x = \lambda - 1$

Stabiliteten hos fixpkt. bestäms f_λ':

Om p fixpunkt så $|f'(p)| < 1 \implies p$ stabil

$|f'(p)| > 1 \implies p$ instabil

$$f_\lambda'(x) = \lambda \frac{1\cdot(1+x) - 1\cdot x}{(1+x)^2} = \lambda \frac{1}{(1+x)^2}$$

$f_\lambda'(0) = \lambda$ så $x = 0$ stabil fixpkt om $0 < \lambda < 1$

$f_\lambda'(\lambda - 1) = \lambda \frac{1}{(1+\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda}$, $x = \lambda - 1$ stabil om $\lambda > 1$

För $\lambda = 1$ när fixpkt. sammanfaller i $x = 0$ kan man t.ex med grafisk analys visa stabilitet.

2-cykler består av två punkter p & q, $p \neq q$, p och q ej fixpunkter s.a.

$f_\lambda(p) = q$ och $f_\lambda(q) = p$, dvs både p och q

löser $f_\lambda(f_\lambda(x)) = x \iff$

$$\frac{\lambda \frac{\lambda x}{1+x}}{1 + \frac{\lambda x}{1+x}} = x$$

. Man visar att denna ekvation endast har de två fixpkts lösningarna

$x = 0$ och $x = \lambda - 1$

~~SVAR: INGA 2-CYKLER. För $0 < \lambda \leq 1$ $x=0$ enda f.-pkt stabil, $\lambda > 1$ $x = 0$ instabil, $\lambda - 1$ stabil~~

11. Vi söker ekvation på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

$y_1(x) = x$, $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$ ger att

$$0 + p(x) + q(x)x = 0 \iff p(x) + q(x)x = 0$$

$y_2(x) = x^2$, $y_2' = 2x$ $y_2'' = 2$ ger att

$$2 + 2x\,p(x) + x^2 q(x) = 0$$

Vi har $\begin{cases} p(x) + q(x)x = 0 & (1) \\ 2 + 2x\,p(x) + x^2 q(x) = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow p(x) = -x\,q(x)$. Insatt i (2) ger det

$$2 + 2x(-x\,q(x)) + x^2 q(x) = 0$$

$$\iff 2 - x^2 q(x) = 0 \iff q(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow p(x) = -x\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

<u>SVAR:</u> $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$

SVAR (10): Systemet saknar 2-cykler för alla λ.
För $0 < \lambda \le 1$ har systemet en fixpkt $x = 0$ som är stabil
För $\lambda > 1$ har systemet 2 fixpunkter: $x = 0$, instabil; $x = \lambda - 1$, stabil

12.

$$\int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} c_n \Phi_n(x) \right]^2 dx$$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \left(\Phi_i(x)\right)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} c_i c_i \Phi_i \Phi_j \right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \underbrace{\int_a^b \left[\Phi_i(x)\right]^2 dx}_{= \underline{1}} + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} c_i c_j \underbrace{\int_a^b \Phi_i \Phi_j \, dx}_{= 0}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \qquad \text{V.S.B.}$$