

Institutionen för Matematik, KTH,  
Olle Stormark.

**KursPM för 5B1215, delkursen Partiella Differentialekvationer  
för ME2, vt 2005.**

Denna kurs behandlar teorin för *andra ordningens lineära partiella differentialekvationer* och då speciellt klassiska differentialekvationer från den matematiska fysiken såsom vågekvationen, diffusionsekvationen, Laplaces ekvation och Schrödingerekvationen. Huvudmetoden är *variabelseparation*, som naturligt leder till *egenvärdesproblem för ordinära differentialekvationer*. Vi börjar lite försiktigt med att studera differentialekvationer med konstanta koefficienter i cartesiska koordinater och rektangulära axelparallella områden. Som egenfunktioner får vi då *sinus-* eller *cosinusfunktioner*, vilka leder till sinus- respektive cosinusserier – som är specialfall av de Fourierserier vi stött på i tidigare kurser. Då vi senare av symmetriskäl använder cylindriska eller sfäriska koordinater får vi allmännare egenfunktionssystem som t.ex. *Besselfunktioner*, *Legendrepolytom*, *klotytfunktioner* och *Laguerrepolytom*.

Egenvärdena kan antingen bilda en *diskret mängd* eller ett *kontinuum*. I det senare fallet övergår egenfunktionsutvecklingarna naturligt i integraler, som till exempel *Fouriertransformen* och *Laplacetransformen*, vilka vi också tittar på. Med hjälp av sådana transformeringar kan man lösa differentialekvationer genom att *transformera bort derivatorna* (sic!).

Kursens höjdpunkt är lösningen av Schrödingerekvationen för väteelektronen. Där ska vi se att de egenvärden som uppträder i samband med variabelseparationen har *mycket konkreta tolkningar* i form av *energinivåer* och *kvanttal*. Man inser då att förekomsten av diskreta egenvärden gör det naturligt att man i kvantummekniken ofta stöter på diskreta storheter i form av kvanttal, och motiverar mer än väl de lösningsmetoder som vi använder – trots att dessa för det mesta leder till *väldigt långa räkningar*.

• **Kurslitteratur:**

1. Nakhlé Asmar: *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Second Edition, PEARSON, Prentice Hall, ISBN 0-13-148096-0. I kursen ingår kapitlen 1–8, 11, samt appendix A. På författarens hemsida

<http://www.math.missouri.edu/~nakhle>

finns lösta exempel och tips om hur man löser problemen i boken med hjälp av MATHEMATICA. *Det tas naturligtvis för givet att Osquarulda själv studerar de lösta exempel som hör till de i kursen ingående avsnitten!*

OBSERVERA: Denna nya upplaga av boken innehåller en hel del nytt och spännande material. Bland annat hela kapitel 12, som

handlar om Greenfunktioner och konforma avbildningar – så att det numera är ett visst överlapp mellan Asmar's bok och kompendiet i Komplexa funktioner.

2. Råde-Westergren: *BETA Mathematics Handbook*. Speciellt kommer vi att behöva använda kapitlen 12: *Orthogonal Series and Special Functions* och 13: *Transforms*.

- **Lärare:** Olle Stormark; e-postadressen är olles@math.kth.se, vanliga adressen är rum 3653 i Klocktornet, Lindstedtsvägen 25, KTH, och telefonnumret är 7907206.

- **Undervisningen** ges i form av 20 stycken 3-timmarslektioner måndagar, onsdagar och fredagar 9–12 under veckorna 3–8, samt måndag och onsdag 9–12 i vecka 9; undervisningssalen är C21 i Electrum.

*OBSERVERA:* Undervisningen är i första hand avsedd för de teknologer som dels tycker att det är meningsfullt att *förstå* matematiken, och dels föredrar muntlig framställning framför skriftlig. Övriga må klara sig på egen hand.

- **Examination:** Under kursens gång ges 3 stycken inlämningsuppgifter, som var och en ger maximalt 2 bonuspoäng.

På tentan kan man sedan få ytterligare 18 poäng, så tillsammans kan man maximalt få 24 poäng.

*Betygsgränser:* 10–14 p ger betyget 3, 15–19 p ger betyget 4, och 20–24 p ger betyget 5.

- **Tentamen:** Ordinarie tentamen 7:e mars kl. 8–13, omtentamen 31:e mars kl. 14–19.

- **Tillåtet hjälpmedel vid tentamen:** Handboken BETA.

- **Kurssekreterare:** Kerstin Engstrand, kerstin@math.kth.se . Kerstin svarar på frågor om registrering och rapportering.

## Preliminär kursplanering

- Lektion 1** Appendix **A.1**: lineära ordinära differentialekvationer, sid. A2–A8, och **A.2**: dito med konstanta koefficienter, sid. A10–A19.
- Lektion 2** Avsnitt **3.2**: vågekvationen för en svängande sträng, sid. 109–111, och början av **3.3**: variabelseparation, sid. 114–118.
- Lektion 3** Avsnitten **2.1—2.3**: Fourierserier, sid. 18–45, samt avsnitt **2.6**: komplexa Fourierserier, sid. 60–65.
- Lektion 4** Avsnitt **2.4**: sinus- och cosinusserier, sid. 50–52, samt avslutning av **3.3**: lösning av vågekvationen för en svängande sträng med hjälp av variabelseparation, sid. 118–123.
- Lektion 5** Avsnitt **3.5**: värmeledningsekvationen = diffusionsekvationen, sid. 135–144, och **3.6**: värmeledning i en rumsdimension, sid. 146–151, plus exercise 10, sid. 152.
- Lektion 6** Avsnitt **3.7**: våg- och värmeledningsekvationerna i två rumsdimensioner, sid. 155–162, samt **3.8**: Laplaces ekvation i två dimensioner, sid. 163–168.  
*Inlämningsuppgift 1 lämnas ut.*
- Lektion 7** Avsnitt **6.1**: ortogonala funktioner, sid. 326–331 och vidare **6.2**: Sturm-Liouville teori, sid. 333–341.
- Lektion 8** Början på avsnitt **4.2**: vinkeloberoende vågekvationen för ett cirkulärt trumskinn, sid. 198–200, **A.3**: reduktion av ordningen sid. A21–A22 och Eulers ekvation, sid. A24–A26, samt **A.5**: potensserielösningar i det reguljära fallet, sid. A40–A48. Dessutom rekommenderas avsnitt **A.4** varmt till alla som behöver repetera teorien för potensserier.
- Lektion 9** *Inlämningsuppgift 1 lämnas in.*  
Avsnitt **A.6**: Frobenius metod, sid. A51–A62.  
*Inlämningsuppgift 2 lämnas ut.*
- Lektion 10** Avsnitt **4.7**: Besselfunktioner, sid. 237–244, **4.8**: Besselserier, sid. 248–254, samt slutet på **4.2**, sid. 200–205.
- Lektion 11** Avsnitt **4.3**: allmänna vågekvationen för ett cirkulärt trumskinn, sid. 207–214, **4.4**: jämviktstemperaturen i en cirkulär skiva, sid. 216–221, samt **4.5**: jämviktstemperaturen i en cylinder, sid. 228–229.
- Lektion 12** *Inlämningsuppgift 2 lämnas in.*  
Avsnitt **5.1**: Laplaces ekvation i sfäriska koordinater, sid. 270–274, **5.5**: Legendres differentialekvation, sid. 300–305, samt **5.6**: Legendreserier, sid. 308–315.

**Lektion 13** Tillbaka till avsnitt **5.2**:  $\phi$ -oberoende Dirichletproblemet för ett klot, sid. 274–279, därefter **5.7**: associerade Legendrefunktioner, sid. 319–323, samt **5.3**: allmänna Dirichletproblemet för ett klot och genomgång av klotytfunktioner, sid. 281–288.

**Lektion 14** Avsnitt **7.2**: Fouriertransformen, sid. 398–407 samt **7.3**: transformmetoder, sid. 411–417.

**Lektion 15** Avsnitt **7.4**: värmeledningsekvationen i en oändlig stav, sid. 420–425 och avsnitt **7.5**: Poissons integralformel, sid. 429–431.

*Inlämningsuppgift 3 delas ut.*

**Lektion 16** Avsnitt **8.1**: Laplacetransformen, sid. 480–490.

**Lektion 17** Avsnitt **8.2**: egenskaper hos Laplacetransformen, sid. 491–498, och **8.3**: tillämpningar på partiella differentialekvationer, sid. 502–507.

**Lektion 18** *Inlämningsuppgift 3 lämnas in.*

Avsnitt **11.1**: Schrödingerekvationen, sid. 574–579, och kvantharmoniska oscillatorn i en rumsdimension, sid. 580.

**Lektion 19–20** Avsnitt **11.4**: Hermite och Laguerrepolytom, sid. 597–606 och avsnitt **11.2**: lösning av Schrödingerekvationen för väteelektronen, sid. 581–588.

### Rekommenderade övningsexempel från de olika avsnitten i kursboken.

**Löfte:** Om du har *förstått* uppgifterna nedan, inlämningsuppgifterna samt de gamla tentatalen, så kommer det att bli *väldigt svårt* att köra på tentan. Om du får problem, så titta på de lösningar som finns på Asmars hemsida och/eller be Olle om hjälp.

**3.3:** 1, 5, 9, 13 och 15.

**3.5:** 1 och 5.

**3.6:** 1, 5 (finns inte i förstaupplagan) och 10.

**3.7:** 1, 5 och 11.

**3.8:** 1 och 5.

**6.1:** 1 och 7.

**6.2:** 5 och 17.

**A.3:** 11 och 33.

**A.5:** (=A.4 i förstaupplagan) 5, 11 och 15 (finns inte i förstaupplagan).

**A.6:** (=A.5 i förstaupplagan) 11, 13 och 15.

**4.7:** 1 och 5.

**4.2:** 1 och 5.

**4.3:** 1.

**4.4:** 1.

**4.5:** 5.

**5.5:** 1, 5, 7 och 17.

**5.3:** 1.

**7.2:** 5, 13, 41 och 49 (i förstaupplagan: 7, 13, 35 respektive 41).

**7.3:** 1, 5 och 13.

**7.4:** 1 och 9.

**7.5:** 1, 8 och 10.

**8.2:** 35, 37 och 41.

**8.3:** 1, 5 och 15.

**11.1:** 4, 5 och 6.

**11.2:** 3 och 4.

**11.4:** 18 och 19.

**SLUT!**