Kontrollskrivning, 2007-03-29, kl. 13.15–15.00.

5B1219 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 1. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 1) Betrakta fältet

$$\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^n},$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn, r dess belopp, och $\mathbf{a}$ är en konstant vektor. För vilket eller vilka värden på n blir divergensen av $\mathbf{A}$ lika med noll (dvs $\mathbf{A}$ blir divergensfritt)?

Att $\mathbf{r}$ är ortsvektorn betyder att $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Enligt räknereglerna för divergensen har vi att

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^n} \right) = \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n}\, \nabla \cdot \mathbf{r}.$$

Nu är dessutom $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ samt

$$\nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n} = \frac{1}{r^n}\, \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\, \nabla r^{-n},$$

och vi räknar snabbt ut att $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$, medan

$$\nabla r^{-n} = -n\, \frac{\mathbf{r}}{r^{n+2}};$$

detta senare följer enkelt ur $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi får att

$$\nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n} = \frac{\mathbf{a}}{r^n} - n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\, \frac{\mathbf{r}}{r^{n+2}},$$

och följaktligen att

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n} - n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\, \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^{n+2}} + 3\, \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n}.$$

Eftersom $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ blir alltså

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = (4 - n)\, \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^n}.$$

För att detta skall bli noll (om $\mathbf{a}$ ej är nollvektorn) krävs att $n = 4$.

2. (MODUL 1) I en vätska kan Newtons ekvation skrivas

$$\rho(\mathbf{r})\,\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\nabla p(\mathbf{r}),$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn, $\rho(\mathbf{r})$ masstätheten, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ accelerationen, och $p(\mathbf{r})$ är trycket. Bestäm den vinkel som $\mathbf{a}$ bildar med $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$.

Vi skriver sambandet kort som

$$\rho\,\mathbf{a} = -\nabla p,$$

och tar rotationen på båda sidor:

$$\nabla \times (\rho\,\mathbf{a}) = -\nabla \times (\nabla p) = \mathbf{0};$$

vi vet ju att rotationen av ett konservativt fält är noll. Enligt räknereglerna för rotationen blir vänster led

$$\nabla \times (\rho\,\mathbf{a}) = (\nabla\rho) \times \mathbf{a} + \rho\,\nabla \times \mathbf{a},$$

så att

$$\rho\,\nabla \times \mathbf{a} = -(\nabla\rho) \times \mathbf{a},$$

vilket innebär att $\nabla \times \mathbf{a}$ är ortogonal mot $\mathbf{a}$, p g a egenskaperna hos vektorprodukten. Vinkeln är alltså $\pi/2$.