Kontrollskrivning, 2005-03-29, kl. 13.15–15.00.

5B1219 Vektranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 2. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Bestäm konstanterna a, b, c så att

$$x = u^2 + av^2, \quad y = 2uv, \quad z = bu + cv + w,$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u, v, w). Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A} = (x, y, 3z)$.

Vi skriver $\mathbf{r} = (x, y, z)$ och beräknar

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 2v, b), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2av, 2u, c), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = (0, 0, 1).$$

Ur detta finner vi att

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = b, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = c, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 4auv + 4uv + bc.$$

För att vi ska ha ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem krävs alltså att $b = c = 0$ och $a = -1$. De associerade enhetsbasvektorerna blir

$$\hat{u} = \frac{(u, v, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \hat{v} = \frac{(-v, u, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \hat{w} = (0, 0, 1).$$

Detta kan vi skriva som sambanden

$$\hat{u} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{x} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{y}, \quad \hat{v} = -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{x} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{y}, \quad \hat{w} = \hat{z},$$

vilka lätt inverteras:

$$\hat{x} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{u} - \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{v}, \quad \hat{y} = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{u} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\,\hat{v}, \quad \hat{z} = \hat{w}.$$

Vi får efter lite räknande att

$$\mathbf{A} = (x, y, 3z) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + 3z\,\hat{z} = u\sqrt{u^2 + v^2}\,\hat{u} + v\sqrt{u^2 + v^2}\,\hat{v} + 3w\,\hat{w},$$

dvs

$$A_u = u\sqrt{u^2 + v^2}, \quad A_v = v\sqrt{u^2 + v^2}, \quad A_w = 3w.$$

2. (MODUL 2) Beräkna flödesintegralen

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S},$$

där

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (xy, yz, xz + 1)$$

och S är ytan

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad \text{där} \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

Normalen till ytan antas riktad så att dess z-komponent är positiv i punkten (0,0,4).

Vi använder polära koordinater i xy-planet:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

Då blir

$$z = 4 - r^2.$$

Med $\mathbf{r} = (r\cos t, r\sin t, 4 - r^2)$ blir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos t, \sin t, -2r), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (-r\sin t, r\cos t, 0),$$

och kryssprodukten evalueras:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (2r^2\cos t, 2r^2\sin t, r).$$

Vi ser att den är korrekt riktad uppåt. I de polära koordinaterna längs med ytan blir

$$\mathbf{A} = (r^2\cos t\sin t, r(4 - r^2)\sin t, r(4 - r^2)\cos t + 1),$$

och därmed

$$\mathbf{A} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right] = 2r^4\cos^2 t\sin t + 2r^3(4 - r^2)\sin^2 t + r^2(4 - r^2)\cos t + r.$$

Integralen blir (integrationsgränser $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$)

$$\int\!\!\int \mathbf{A} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right] dr dt = \frac{44\,\pi}{3}.$$