Kontrollskrivning, 2005-04-27, kl. 13.15–15.00.

5B1219 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 2 (rep). Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 2) Ett vektorfält $\mathbf{A}$ ges i sfäriska koordinater $(r, \theta, \varphi)$ av

$$\mathbf{A} = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Här avses att $\mathbf{e}_r = \hat{r}$, $\mathbf{e}_\theta = \hat{\theta}$, $\mathbf{e}_\varphi = \hat{\varphi}$ är motsvarande kroklinjiga enhetsvektorer. Avgör om det finns en skalär potential till $\mathbf{A}$. Om det finns en sådan skall den dessutom bestämmas.

---

Enligt BETA, s. 249, har vi att

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Detta betyder att vi söker ett skalärfält $f$ med

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\sin\varphi.$$

Vi ser att

$$f = r\sin\theta + \cos\varphi + C$$

uppfyller detta, där $C$ är en konstant.

---

2. (MODUL 2) En boll med radie 3 och medelpunkt (0,0,-5) är (helt) nedsänkt i en vätska för vilken trycket ges av

$$p(x, y, z) = -z$$

då $z < 0$. Beräkna den lyftkraft

$$-\iint_{\partial B} p\,\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

som vätskan utövar på bollen $B$. Här är $\hat{\mathbf{n}}$ den utåtriktade enhetsnormalvektorn.

---

Först observerar vi att

$$-\iint_{\partial B} p\,\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_{\partial B} z\,\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_{\partial A} (z-5)\,\hat{\mathbf{n}}\,dS,$$

där $A$ är bollen av radie 3 centrerad i origo. På $A$ byter till sfäriska koordinater. Då blir på bollen $A$:s rand

$$z = r\cos\theta = 3\cos\theta, \quad \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r, \quad dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 9\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Av symmetriskäl blir nu

$$\iint_{\partial A} \hat{\mathbf{n}}\, dS = \mathbf{0},$$

så integralen vi söker blir

$$\iint_{\partial A} z\,\hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_{\partial A} 3\cos\theta\,\mathbf{e}_r\, 9\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Eftersom

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z,$$

och p g a symmetriskäl bara $z$-riktningen ger bidrag, så får vi

$$\begin{aligned}\iint_{\partial A} 3\cos\theta\,\mathbf{e}_r\, 9\sin\theta d\theta d\varphi = 27 \iint_{\partial A} \cos^2\theta\, \sin\theta d\theta d\varphi \\ = 27\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 36\pi.\end{aligned}$$