Kontrollskrivning, 2007-05-07, kl. 13.15–15.00.

5B1219 Vektoranalys och komplexa funktioner, för E.

Kontrollskrivning MODUL 4. Skriv **program:** **samt namn och personnummer:**

1. (MODUL 4) (a) Funktionen $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ antas analytisk i ett område som innehåller punkten $z = 2+3i$. Här tänker vi som vanligt att $z = x + iy$. Vi vet att

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,3) = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(2,3) = 4.$$

Bestäm derivatan $f'(2+3i)$.

(b) Bestäm alla analytiska funktioner vars imaginärdel är $e^{3y}\cos(3x)$.

(a) Vi vet att om f är analytisk så är

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Enligt CR får vi att

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Instoppning i punkten $2+3i$ ger att

$$f'(2+3i) = 1 - 4i.$$

(b) Här finner man att

$$f(z) = i\,e^{-3iz} + C,$$

där konstanten C är reell, är den allmänna lösningen.

---

2. (MODUL 4) Antag att $f(z)$ är analytisk i ett område D. Visa att

$$\Delta\big(|f(z)|^2\big) = 4\,|f'(z)|^2$$

på D, där

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

är Laplace-operatorn.

Vi skriver $f = u + iv$, där u och v är harmoniska. Då är $|f|^2 = u^2 + v^2$, och vi finner att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(u^2+v^2\big) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Motsvarande kalkyl med y istället för x utföres, och vi summerar resultaten:

$$\Delta\big(u^2+v^2\big) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\Delta u + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\Delta v.$$

Vi använder nu att

$$|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,$$

så om vi använder att $\Delta u = \Delta v = 0$ samt att CR gäller, får vi att $\Delta\big(|f(z)|^2\big) = 4\,|f'(z)|^2$.