Tentamensskrivning, 2007-05-24, kl. 14.00–19.00.

5B1219 Differentialekvationer I, för E.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg 4 krävs 10 poäng, medan för betyg 5 krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

1. Vi betraktar vektorfältet

$$\mathbf{A} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho^2}\,\mathbf{e}_\varphi,$$

angivet i cylinderkoordinater.

(a) Beräkna $\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

(b) Låt Γ vara en sluten kurva som ej omsluter z-axeln. Visa att kurvintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$

blir lika med noll.

(c) Undersök vad som händer om Γ istället omsluter z-axeln.

(5)

(a) Enligt formel i BETA, s. 248, är rotationen

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z,$$

vilket i den givna situationen ger

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\sin\varphi}{\rho^2} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{\rho^2}\right)\mathbf{e}_z = \mathbf{0}.$$

Vi ser att z-axeln, dvs $\rho = 0$, är den enda singulariteten för fältet.

(b) Enligt Stokes' sats blir kurvintegralen lika med noll, eftersom rotationen är noll.

(c) Om kurvan omsluter z-axeln gör singulariteten att Stokes' sats ej kan tillämpas. Istället betraktar vi skalärfältet

$$\Phi = -\frac{\cos\varphi}{\rho},$$

och observerar att dess gradient blir $\mathbf{A}$. Detta innebär att fältet är konservativt, och kurvintegralen längs varje sluten kurva blir noll.

---

2. Betrakta bollen

$$B: \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1,$$

samt ellipsoiden

$$E: \quad x^2 + y^2 + 5z^2 < 10.$$

Vi intresserar oss för det elektrostatiska kraftfältet

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

där $\mathbf{r}$ är ortsvektorn och r dess längd. Beräkna

V.g. vänd!

(a) Kraftfältets divergens.

(b) Flödesintegralen

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

där dS är ytelementet och $\hat{\mathbf{n}}$ den utåtriktade normalen.

(c) Flödesintegralen

$$\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

(5)

(a) Vi har att

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad \nabla \frac{1}{r^3} = -3 \, \frac{\mathbf{r}}{r^5},$$

så enligt nablakalkylen (BETA, s. 245) blir

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^3} \, \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0.$$

(b) Längs med ∂B är $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{r}$ och $\mathbf{F} = \mathbf{r}$. Flödesintegralen blir alltså

$$\int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\partial B} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dS = \int_{\partial B} dS = 4\pi.$$

Att inte integralen blir noll som den borde enligt Gauss' sats beror på att $\mathbf{F}$ har en singularitet i origo.

(c) Eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ i området mellan ∂B och ∂E blir enligt Gauss' sats flödesintegralerna samma. Dvs

$$\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\partial B} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 4\pi.$$

---

3. Antag att $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \Phi$, där Φ är ett skalärfält. Antag dessutom att $\mathbf{B}$ är ett källfritt vektorfält (dvs divergensen är noll). Vi har en sluten kropp V med glatt rand, och på randen ∂V antar Φ ett konstant värde Φ_0. Beräkna nu trippelintegralen

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dxdydz.$$

Tips: använd en av formlerna i nablakalkylen (BETA s. 245). (5)

Att $\mathbf{B}$ är källfritt betyder att $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Vi har enligt nablakalkylen (BETA, s. 245) att

$$\operatorname{div} (\Phi \, \mathbf{B}) = \Phi \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{grad} \Phi \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Enligt Gauss' sats har vi nu att

$$\iiint_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dxdydz = \iint_{\partial V} \Phi \, \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \Phi_0 \iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS,$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ är den utåriktade normalen. Den sista likheten utnyttjar att $\Phi = \Phi_0$ är konstant på randen. Enligt Gauss sats återigen blir

$$\iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dxdydz = 0.$$

Svaret är alltså noll.

---

4. Antag att $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, är analytisk i ett område D. Låt Γ vara en sluten kurva så att området som innesluts av Γ helt ligger i D. Kurvan antas gå moturs. Vi definierar kurvintegralen

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

som

$$\int_\Gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) + i\int_\Gamma \big(v\,dx + u\,dy\big).$$

Visa att i så fall blir

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

(5)

Enligt Greens formel har vi det generella sambandet

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

där Ω är det område som Γ innesluter. Speciellt blir

$$\int_\Gamma \big(u\,dx - v\,dy\big) = -\iint_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy$$

samt

$$\int_\Gamma \big(v\,dx + u\,dy\big) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Enligt CR är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

så båda ovanstående integraler blir noll.