5B1230 Matematik IV

Föreläsning nr 1
28 februari 2005

ansvarlig kurslärare

Jan-Olov Strömberg

Matematik

Stockholm

Moment 1:

Ordinära differentialekvationer (ODE) av första ordningen

- Till detta är avsatt

Till detta är avsatt	Föreläsningar	2 dubbelltimmar
	Lektioner	2 dubbeltimmar
	Övningräkning	1 dubbeltimmar

- Littteratur: Zill-Cullen 1:1-3 och 2:1-3,5 och 3:1-3
- Examineras med kontrollskrivning:
  Onsdag den 9 mars, kl. 13.15-14.00

Moment 1: (forts)

ODE - försök få en intuitiv känsla för vad en ODE är/gör

- En ordinär differentialekvation av 1:a ordning:

$$G(t, x, x') = 0.$$

- vi kan bestämma en funktion eller process $x(t)$ för $t \geq t_0$ utifrån
- att vi har ett startvillkor; $x(t_0) = x_0$ och
- att vi med hjälp av differentialekvationen kan kan bestämma värdet av derivatan $x'(t)$ för $t \geq t_0$.
- Notera att här är det en återkoppling. Vi behöver i regel värdet av $x(t)$ för att för att bestämma värdet av $x'(t)$

Rita på tavlan

Moment 1: (forts)

ODE - försök få en intuitiv känsla för vad en ODE är/gör

- Vi kan se det som att vi *styr* processen $x(t)$ med hjälp av derivatan: minns integralkalkylens fundamentalsats:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds$$

- I detta exemplet är t den oberoende variabeln och x är den beroende variablen, d.v.s. x är en funktion av t. Men namnen på variabler kan i hög grad variera.

ODE - trivial exempel

- Exempel 1: derivatan given expicit:

$$\frac{dy}{dt}(t) = F(t) \text{ för } t \geq t_0;$$

$$y(t_0) = y_0.$$

Exempel på tavlan

ODE - Zill-Cullen översikt

- Z-C 1:1 Definitioner och terminologi.
- Z-C 1:2 1:a (och n:te) ordnings ODE med startvillkor. Existens och entydighetssatser.
- Z-C 1:3 Matematiska modeller med diff.ekvationer.
- Z-C 2: Lösningsmetoder.
  - Z-C 2:1 Riktningsfält och lösningskurvor, autonoma system.
  - Z-C 2:2 Separation av variabler.
  - Z-C 2:3 Linjära ODE, integrerande faktor
  - Z-C 2:5 Substitutionsmetoder
- Z-C 3: ODE i matematiska modeller.
  - Z-C 3:1 Modeller med linjära ODE.
  - Z-C 3:2 Modeller med icke-linjära ODE.
  - Z-C 3:3 Modeller med linjära och icke-linjära system.

ODE - lösningar, lösningsintervall mm

- En **lösning till ODE:n** är en funktion som uppfyller differentialekvationen i något öppet intervall
- Den **allmänna lösningen till ODE:n** är mängden av *alla* funktioner uppfyller differentialekvationen i något öppet intervall
- Ett **lösningsintervall** för en lösning till ODE:n är ett maximalt intervall sådant att lösningen uppfyller ODE i alla punkter i intervallet. Derivatan till lösningen måste existera i hela intervallet. Intervallet kan var oändligt eller ändligt, öppet eller inkludera en eller båda endpunkterna
- Ofta är **1-parameter familj** av lösnigar.

ODE - lösningar, lösningsintervall mm

- Vid **ODE med startvillkor** , ger startvillkoret(-n) en restriktion till de av de allmänna lösningarna som uppfyller startvillkoren.
- Varning: Vid omskrivningar av en ODE till ex. explicit form, så kan man lätt tappa bort lösningar eller få men nya lösningar som inte uppfyller den ursprungliga differentialekvation.

ODE - definitoner (Z-C 1:2)

- **Definition** Första ordningens ODE med startvillkor:

$$\frac{dy}{dt}(t) = F(t, y) \text{ för } t \geq t_0;$$

$$y(t_0) = y_0.$$

- **Definition** n:te ordningens ODE med startvillkor:

$$y^{(n)}(t) = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}), \text{ för } t \geq t_0;$$

$$y(t_0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

ODE - definitons

- Specialfall Autonomt system av första ordningen

$$\frac{dy}{dt} = F(y)$$

- **Definition** Första ordningens *linjära* ODE med startvillkor:

$$\frac{dy}{dt} = yg(t) + h(t) \text{ för } t \geq t_0$$

$$y(t_0) = y_0$$

I en ODE är oftast derivatan given på implicit form.
Exempel

$$xy' = 2y$$

ODE - existens och entydighet av lösning Z-C 1:2

Existerar det alltid lösningar till en ODE och är lösningen med entydig när startvillkoret är givet?

- Exempel: $(y')^2 + 1 = 0$ kan aldrig vara uppfyllt för någon reell funkton $y(x)$
- Exempel ODE:n $y' = 2\sqrt{|y|}$ har oändligt många lösningar som uppfyller startvillkoret $y(0) = 0$. På tavlan

ODE - existens- och entydighets- satser (Z-C 1:2)

Låt Funktionen $F(x,y)$ vara definerad i rektangeln R. Vi ska se på lösningar till ODE:n

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

med startvillkoret $y(x_0) = y_0$ där (x_0, y_0) är en punkt i rektangeln R.

Existenssats Om $F(x,y)$ är en kontinuerlig funktion i R och (x_0, y_0) är en inre punkt i R så finns det ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ med $h > 0$, där det existerar (minst) en lösning till ODE som uppfyller $y(x_0) = y_0$.

Entydighetssats Om dessutom $F(x,y)$ har en kontiuerlig partiell derivata $\frac{dF}{dy}$ i R så är lösningen entydig.

ODE - rita lösningskurvor (Z-C 2:1)

- Rikttningesfält
- Rita lösningskurvor
- Autonoma system och lösningkurvor.
- Exempel

$$y' = y(1-y)$$

- Kritiska punkter till autonom system
- Fasporträtt av autonoma system

ODE - lösningsmetoder (Z-C 2:2)

Separation av variabler

$$g(y)y' = h(x)$$

vilket skrives $g(y)dy = f(x)dx$.
Båda sidor kan nu integreras.

$$\int g(y)dy = G(y) = \int h(x)dx + C = H(x) + C$$

ur vilket vi kan lösa ut $y = G^{-1}(H(x) + C)$
Exempel

ODE - lösningmetoder (Z-C 2:3)

Integrerande faktor vid linjära ODE:

$$y' - g(x)y = h(x);$$

Ekvationen multipliseras på båda sidor med $\mathrm{e}^{-G(x)}$ där $G' = g$. Vi har identiteten

$$\mathrm{e}^{-G(x)}(y' - g(x)y) = (\mathrm{e}^{-G(x)}y)'$$

Differentialekvationen blir då

$$(\mathrm{e}^{-G(x)}y)' = \mathrm{e}^{-G(x)}h(x).$$

Med detta triks har vi reducerat den linjära ODE till den trivella formen som vi bara behöver integrera.
Exempel:

ODE - 1:a ordnings linjaöra ODE (Z-C 2:3)

Exempel

$$y' + 2xy = x \text{ med startvillkor } y(0) = 2;$$

- Finn allmänna lösningen till den homeogena evationen:
  (en 1-parameter familj av lösningar)
- Finn en partikulär lösning till den icke-homogena ekvationen.
- Erhåll den allmänna läsningen till den icke-homogena ekvationen genom att sätta samman dessa
  Finn den lösningsparameter som gör att att startvillkoret blir uppfyllt

ODE - lösningsmetoder (Z-C 2:5)

- Mer eller mindre triksiga variabelsubstitutioner:
  Exempel

Detta är sista siden av Föreläsningl nr 1. Klicka för att komma till första sidan?