KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 1, onsdag 2005-03-09 kl 13.15-14.00
Version: **A**

Tillåtna hjälpmedel BETA,

Namm: Födelsenr:

Kursens student-idnr: (ifylles av rättande lärare)
Lycka till!

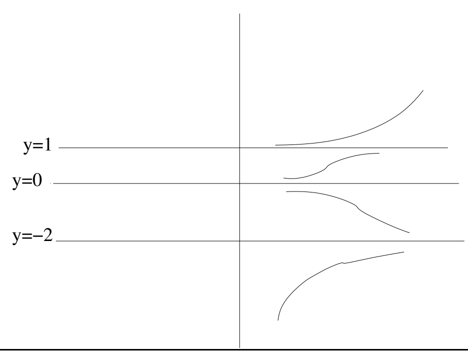
Uppgifter:

1. Låt differentialekvationen för funktionen $y(t)$ vara det autonoma systemet $y' = y(y-1)^2(y+2)$.
   Finn de kritiska y-värden för vilka det finns stationära lösningar och undersök var och en av dessa med avseende på stabilitet.
   Välj en punkt (t_0, y_0) i var och en av de områden som avgränsas av de stationära lösningarna och skissera för var av en av dessa punkter lösningen som uppfyller begynnelsevillkoret $y(t_0) = y_0$.

Kritiska y-värden: $y = -2$, $y = 0$ och $y = -1$.
Vi gör teckenstudium av högerledet $y(y-1)^2(y+2)$:

$$(-\infty) + (-2) - (0) + (1) + (\infty).$$

Slutsats: (-2) stabil, (0) ostabil samt (1) semistabil.
Vi ritar in lösningskurvor i figuren:



---

2. Lös begynnelsvärdeproblemet

$$x^2y' + 2xy = 2x^3 + 1;\ \text{med}\ y(1) = 2.$$

Vi skriver först differentialekvationen på standardform:

$$y' + 2\frac{1}{x}y = 2x + \frac{1}{x^2};$$

(2 forts.)

sedan räknar vi integrerande faktor: $g(x) = 2\frac{1}{x}$ har primitiv funktion $G(x) = \int^x 2\frac{1}{t}dt = 2\ln(|x|)$ och vi får en integrerande faktor $\mathrm{e}^G(x) = x^2$.
Vi får faktiskt tillbaka den ursprungliga differentialekvationen som kan skrivas

$$(x^2y)' = 2x^3 + 1.$$

Efter integration av båda sidor får vi $x^2y = \frac{1}{2}x^4 + x + C$. Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger $2 = \frac{1}{2} + 1 + C$ vilker att vi måste välja konstanten $C = \frac{1}{2}$.
Löser vi ut y får vi
Svaret:$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-2}$

---

3. En ugn är uppvärmd och håller en konstant temperatur T_u C^o.
En termometer sättes in i ugnen och avläses genom glaset i ugnsluckan. Termometern uppvärmes i ugnen och visar dåen temperatur $T(t)$ C^0 som antages följa Newtons lag för uppvärmning:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_u)$$

där proportionalitetskonstanten $k < 0$.
När termometern sattes in i ugnen visade den 20 C^o.
Efter 1 minut visade den 50 C^o.
Efter 2 minuter visar den 75 C^o.
Undersök hur hög är ugnens temperatur T_u.

Vi sätter temperaturskillnaden $S(t) = T(t) - T_u$ vilken då uppfyller differentialekvationem

$$\frac{dS}{dt} = kS$$

som har den exponentialla lösningen $S(t) = C\mathrm{e}^{kt}$. Typiskt för exponetiella functioner är att de avtar (eller växer) proportionellt Ã¶ver tid. Vi ser t.ex. att

$$\frac{S(1)}{S(0)} = \mathrm{e}^k = \frac{S(2)}{S(1)}$$

vilket kan skriva till $S(1)^2 = S(0)S(2)$. Vi sätter in $S(0) = 20 - T_u$, $S(1) = 50 - T_u$ och $S(2) = 75 - T_u$:

$$(50 - T_u)^2 = (20 - T_u)(75 - T_u)$$

Efter förenkling få r vi $1000 = 5T_u$ dvs. $T_u = 200$.
Svar: Ungnen är 200 C^o.
