KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 2, måndag 2005-04-12 kl 11.15-12.00
Version: **A**

Tillåtna hjälpmedel BETA,

Namm: Födelsenr:

Kursens student-idnr: (ifylles av rättande lärare)

Fyll i namn och personnummer ovan!

Vänta på signal från Lärare
innan du öppnar skrivningen!

Vänta med samtal efter skrivningen
tills dess du har lämnat skrivsalen!

Lycka till!

1. Vi har det linjära systemet

$$x' = 2x - 2y,$$
$$y' = -x + 3y.$$

(a) Bestäm den allmänna lösningen till systemet.

(b) Finn den lösning till systemen som uppfyller begynnelsevillkoret

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi finner egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$

Vi har två egenvärden: $\lambda = 4$ och $\lambda = 1$.
Vi finner egenvektorer:
För $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = 0 \text{ ger } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

För $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = 0 \text{ ger } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Svar: Den generella lösningen blir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sätter vi in $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ så får vi

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger $c_1 = 0$ och $c_2 = 1$ **Svar:** Begynnelsvärdeproblemet har lösningen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

2. Givet det autonoma systemet

$$x' = 4y + xy,$$
$$y' = 3x - xy.$$

(a) Finn alla kritiska punkter till systemet.

(b) Bestäm dessa kritiska punkter med avseende på lokal stabilitet.

(2.forts)

Kritiska punkt då $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$:

$$\begin{cases} 4y + xy & = (4+x)y & = 0 \\ 3x - xy & = x(3-y) & = 0 \end{cases}$$

som har lösningarna $x = 0, y = 0$; och $x = -4, y = 3$;.
a) Svar: Kritista punkter är $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (-4, 3)$
För att undersöka dessa kritiska punkter beräknar vi fïst Jacobi matirsen:

$$\begin{pmatrix} y & 4+x \\ 3-y & -x \end{pmatrix}$$

I punkten $(x, y) = (0, 0)$ blir Jacobi matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

dess determinant $\triangle = -12$ ger slutsaten en ostabil sadelpunkt.
I punkten $(x, y) = (-4, 3)$ blir Jacobi matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

med egenvärdena 3 och 4 drar vi slutsaten en ostabil node.
b)Svar: Punkten $(x, y) = (0, 0)$ är en ostabil sadelpunkt, och punkten $(x, y) = (-4, 3)$ är en ostabil node.

---

3. Givet differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = t.$$

(a) Finn alla lösningar till motvarande homogena differentialekvation.

(b) Visa att det finns en lösning på formen $y = at+b$ för några konstanter a och b.

(c) Finn den lösning till den givna differentialekvationen som uppfyller $y(0) = 0$ och $y(1) = 1$.

(3 forts.)

a) Den homogen differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

har karakteristik ekvation $r^2 - 2r + 1 = 0$ med dubbelrot $r_{1,2} = 1$ och vi får
Svar: Den homogena differentialekvationen har generella lösningen

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t \mathrm{e}^t$$

b) vi deriverar $y = at_b$ och får $y' = a$ och $y'' = 0$ som insättes i differentialekvationen:

$$0 - 2a + at + b = t$$

Differentialekvation är uppfylld om $a = 1$ och $b = 2$ **Svar:** En partikulärlösning är $y(t) = t + 2$.
c Vi sätter samman lösningen av den homogena ekvatione i a) med partikulär"osningen i b) och får den generella lösningen till den ihomogena differentialekvationen

$$y(t) = t + 2 + c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t \mathrm{e}^t$$

Randvillkoret $y(0) = 0$ ger $2 + c_1 = 0$ dvs $c_1 = -2$,
randvillkoret $y(1) = 1$ ger $3 + c_1 \mathrm{e} + c_2 \mathrm{e} = 1$.
Vi får $c_2 \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2$ dvs. $c_2 = 2 - 2\mathrm{e}^{-1}$
Svar: Randvärdesproblemet har lösningen

$$y(t) = t + 2 - 2\mathrm{e}^t + (2 - 2\mathrm{e}^{-1}) t \mathrm{e}^t$$