KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 3, onsdag 2005-04-27 kl 14.00 - 15.00
Version: **A**

Tillåtna hjälpmedel BETA,

Namm: Födelsenr:

Kursens student-idnr: (ifylles av rättande lärare)

Lycka till!

Uppgifter:

1. Beräkna

$$\int_0^2 \left[\int_x^2 x\sqrt{y^3+1}dy\right] dx$$

Byt integationsordning, Integralen blir då

$$\int_0^2 \left[\int_0^y x\sqrt{y^3+1}dx\right] dy = \int_0^2 \sqrt{y^3+1}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^y dy =$$
$$\tfrac{1}{6}\int_0^2 3y^2\sqrt{y^3+1}dy = \tfrac{1}{6}\left[\tfrac{(y^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \tfrac{1}{9}(9^{\frac{3}{2}}-1) = \tfrac{26}{9}$$

2. Givet den generaliserade integralen

$$\iint_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^3}dxdy$$

där

$$\Omega = \big\{(x,y); \quad x^2+y^2 \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\big\}$$

(a) Finn en uttömmande följd av delmängder $\{\Omega_j\}$ till Ω.

$$\Omega_j = \{(x,y) : 4 \leq x^2+y^2 \leq j^2, \}$$

där $j = 3, 4, 5, \ldots$.

(b) Avgör om integralen konvergerar eller divergerar. Om den divergerar visa detta. Om den konvergerar så bestäm dess värde.

Vi får med byte till polära koordinater

$$\iint_{\Omega_j} \tfrac{x}{(x^2+y^2)^3}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^j \tfrac{r\cos(\theta)}{r^6}rdr$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta \int_2^j r^{-4} = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}[\tfrac{r^{-3}}{-3}]_2^j = 1 \cdot \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{8} - j^{-3})$$

Låter vi j gå mot $+\infty$ får vi gränsvärdet $\frac{1}{24}$.
Svar: Den generaliserade integralen konvergerar och värdet är $\frac{1}{24}$

(2 forts.)

3. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_\Omega y^2 dxdy$$

där

$$\Omega = \left\{(x,y);\quad 1 \leq xy \leq 3, \quad 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$$

Inför de ny variablerna $u = xy$ och $v = \frac{x}{y}$ och integralen blir då

$$\iint_{\Omega'} (y(u,v))^2 |det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}| dudv$$

där $\Omega' = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2\}$ Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

vars determinant blir $2\frac{y}{x} = 2v$, och $det\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ blir då $1/det\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \frac{1}{2v}$. Vidare så är $(y(u,v)^2 = uv$. Integralen blir därför

$$\iint_{\Omega'} uv \cdot |\frac{1}{2v}| dudv = \int_0^2 dv \int_0^3 \frac{u}{2} du = [v]_1^2 \left[\frac{u^2}{4}\right]_1^3 = (2-1)\cdot(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}) = 2.$$

Svar Dubbelintegralens värde är 2

(3 forts.)