KTH Matematik

5B1230 Matematik IV, för I1
Konstrollskrivning nr 4, fredag 2005-05-13 kl 14.00 - 15.00
Version: **A**

Tillåtna hjälpmedel BETA,

Namm: Födelsenr:

Kursens student-idnr: (ifylles av rättande lärare)

Lycka till!

Uppgifter:

1. Beräkna linjeintegralen

$$\int_\Gamma (y^2 - 4xy)dx + x^2 dy$$

där Γ är kurvan $y = x^4$ från $(0,0)$ till $(1,1)$

Vi kan parametrisera kurvan med $y = x^4, \quad 0 \leq x \leq 1$ och då blir $du = 4x^3dx$. Vi får enkelintegralen

$$\int_0^1 ((x^4)^2 - 4x \cdot x^4) + x^2 \cdot 4x^3 dx = \int_0^1 x^8 dx = \left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}$$

Svar: Linjeintegralen blir $\frac{1}{9}$.

---

2. Beräkna ytintegralen

$$\iint_{\Sigma} (yz + x, xz - y \sin x, z \sin x + 2y) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

där Σ är enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och enhetnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ är utåtriktad.

Enligt Gauss sats så är ytintegralen av vektorfältet över enhetssfären lika med integralen av divergensen till vektorfältet taget över enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Divergensen är

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial}{\partial x}(yz + x) + \tfrac{\partial}{\partial y}(xz - y \sin x) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial z}(z \sin x + 2y) = (0 + 1) + (0 - \sin x) + (\sin x + 0) = 1. \end{aligned}$$

Integralen av konstanten 1 över enhetsklotet är lika med dess volym som är $\frac{4\pi}{3}$

Svar: Ytintegralen värde är $\frac{4\pi}{3}$

---

3. Beräkna flödet

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma$$

av vektorfältet $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ genom ytan Σ som är grafen till $z = x^2y + 2; \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2.$ och där enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ har positiv z-komponent.

Vi använder formen för ytintegralen över grafer

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\sigma \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (-f_x, -f_y, 1) dxdy$$

där Σ är grafen av $z = f(x, y)$ över området Ω. I vårt fall är $f(x, y) = x^2y + 2$ och därför blir $f_x = 2xy$ och $f_y = x^2$. Insättning i formeln ger dubbelintegralen

$$\begin{aligned}
&\textstyle\iint_{\Omega} (y, -x, x^2y + 2) \cdot (-2xy, x^2, 1) dxdy \\
&= \textstyle\int_0^2 dx \int_0^2 (-2xy^2 - x^3 + x^2y + 2) dy \\
&= \textstyle\int_0^2 dx \left[-\frac{2}{3}xy^3 - x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + 2y\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \textstyle\int_0^2 \left(\frac{16}{3}x - 2x^3 + 2x^2 + 4\right) dx = \left[\frac{8x^2}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + 4x\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{32}{3} - 8 + \frac{16}{3} + 8\right) = 16.
\end{aligned}$$
